

浅谈对麦克斯韦方程组的理解及其教学研究

张丹伟*

(华南师范大学物理与电信工程学院, 广州 510631)

摘要:对麦克斯韦方程组中位移电流和涡旋电场2个核心概念进行研究分析,并阐述了方程组的物理图像和内涵,探讨了麦克斯韦方程组的教学要点和方法,让学生更好地认识麦克斯韦电磁场理论的重要意义。

关键词:麦克斯韦方程组; 电磁场; 位移电流; 涡旋电场

麦克斯韦方程组是整个电磁学的基本物理公式,是描述所有电磁现象的基本方程.虽然在电磁学、电磁场与电磁波、电动力学等大学物理或电子通信基础课程里都有详细的讲解,然而不少学生对麦克斯韦方程组的理解不够深刻,从而不能熟练利用其解决电磁问题.本文围绕位移电流和涡旋电场2个核心概念进行分析,讨论麦克斯韦方程组的内涵及其理解要点,并探讨关于麦克斯韦方程组的教学方法和重要意义.

1 建立麦克斯韦方程组的2个核心概念

在19世纪中期,英国物理学家麦克斯韦全面总结了前人的电磁学研究成果,提出“位移电流”和“涡旋电场”的概念,从基本的电磁实验出发,运用场论的观点建立了完整的电磁场理论体系,即麦克斯韦方程组.在其建立之前,库仑定律、毕奥-萨伐尔定律、安培定律、欧姆定律及法拉第电磁感应定律已相继被提出,而且这些研究成果表明了电磁场各个局部的规律,然而缺乏对各种电磁现象提供统一解释,同时,在关于电磁作用的本质认识上还存在超距说和近距说的交锋.到了1864年12月8日,麦克斯韦在英国皇家学会宣读了关于电磁场理论的总结性论文“电磁学动力学理论”,其中关于“电磁场的普遍方程组”是该论文的核心和主要成果,最终提出了电磁现象的内在联系及统一理论.该方程组被命名为麦克斯韦方程组,揭示了电磁场的运动规律,同时预言了电磁波的存在,为现代无线电电子工业奠定了理论基础.麦克斯韦方程组是继牛顿力学之后物理学史上又一次大统一,是19世纪物理学领域最瞩目的科学成果之一.纵观该方程组的建立过程,位

移电流和涡旋电场是核心概念,因此只有从理论体系和知识结构上去分析和理解这2个概念,才能更好地领会麦克斯韦方程组的内涵及意义.

1.1 位移电流

对恒定电流产生的磁场,有安培环路定理^[1-3]:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I.$$

对方程左边应用斯托克斯公式可得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = I = \int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S},$$

其中 \mathbf{j}_c 为传导电流密度.因此,安培环路定理的微分形式为 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_c$.由于1个旋度场的散度恒为0,可以得到 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j}_c = 0$.

由电荷守恒定律可知,流出闭合曲面的电流等于该曲面所包含体积内的电荷减少率,数学方程为

$$\oint_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

从而可得 $\nabla \cdot \mathbf{j}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.这与 $\nabla \cdot \mathbf{j}_c = 0$ 相矛盾.

恒定场中的安培环路定理应用到非恒定电磁场中会出现矛盾,麦克斯韦从电荷守恒定律出发深入分析了这一矛盾,提出了位移电流假说^[1-3].首先,产生该矛盾的原因在于 $\nabla \cdot \mathbf{j}_c = 0$ 是恒定场中得到的,而 $\nabla \cdot \mathbf{j}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 是由电荷守恒定律推导得出的,对于恒定场和非恒定场都适用.其次,这表明了恒定场中的安培环路定律不适用于非恒定场的情况,需要修正.最直接的办法就是将散度方程修正为

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{j}_c + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

然后利用高斯定理 $\nabla \cdot D = \rho$ (D 为电位移矢量)可得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{j}_c + \frac{\partial D}{\partial t}.$$

最后引入位移电流密度 $\mathbf{j}_d = \frac{\partial D}{\partial t}$, 由斯托克斯公式得

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j}_c \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_d \cdot d\mathbf{S} = I_c + I_d, \quad (1)$$

其中 I_d 是位移电流, 而式(1)为全电流公式^[1-3].

综上所述, 位移电流概念是建立完备电磁场理论的重要假设. 它表明了传导电流和位移电流都能产生磁场. 2种磁场都能对其中的电流或运动电荷产生作用力, 其性质也相同, 即均为有旋无源的. 然而, 应当注意这2种磁场也有区别. 首先是产生原因不同, 其次由于位移电流并不表示电荷在空间的运动, 所以它与传导电流不同, 没有化学效应和热效应, 只有磁效应. 可以认为空间的总磁场是传导电流和位移电流产生的磁场之和, 属于无源有旋的矢量场, 其磁力线总是闭合的. 位移电流假设的提出, 消除了把安培环路定理从恒定情形推广到非恒定情形时遇到的矛盾和困难. 麦克斯韦方程组关于电磁波等理论预言实验的证实, 也反证了位移电流假设的正确性.

1.2 涡旋电场

法拉第电磁感应定律指出: 在导体回路中, 变化的磁场能够产生电场. 麦克斯韦通过仔细分析发现导体回路不是存在感应磁电场的必要条件, 从而推广了法拉第电磁感应定律. 此外, 麦克斯韦认为之所以在变化磁场中的闭合导线中会出现电流, 是因为有电场使得电荷运动; 而且这种感应电场的环量不为0, 完全不同于静电场, 因为静电场沿封闭曲线的环量始终为0. 麦克斯韦把这种环量不为0的感应电场称为“旋涡电场”, 相应的感应电动势记为

$$\varepsilon = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \text{ 由电磁感应定律}^{[1-3]}$$

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\text{得到} \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

利用斯托克斯公式, 有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S},$$

因此可以得到涡旋电场满足的微分形式:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

由式(2)可知, 变化的磁场产生电场, 且其环量不为0, 这是涡旋电场的特征. 从上述分析可以发现, 麦克斯韦对法拉第电磁感应定律的推广, 使得其更

接近于物理本质, 即变化磁场产生电场而非电流. 这是因为电流只是空间存在导线回路而产生的外在表现, 即使不存在导线回路, 变化的磁场所产生的旋涡电场依然存在, 其感应电动势不为0.

位移电流和涡旋电场是麦克斯韦电磁理论的核心思想, 即变化的电场可以激发涡旋磁场, 变化的磁场可以激发涡旋电场. 因此, 电场和磁场不是彼此孤立的, 它们相互联系、相互激发组成1个统一的电磁场. 麦克斯韦进一步将电场和磁场的规律综合起来, 建立了完整的电磁场理论体系.

2 麦克斯韦方程组的内涵

麦克斯韦提出的位移电流和涡旋电场假设得到了2个旋度方程. 另外, 麦克斯韦还指出静电场中的高斯定理和恒定磁场中的磁通连续性定理在时变电场中依然成立, 即2个散度方程. 因此, 共4个方程组成的麦克斯韦方程组把任何时空中1点的电磁场与场源联系在一起. 接下来分析麦克斯韦方程组的内涵^[1-3].

麦克斯韦方程组的第1个方程, 即全电流定律, 其微分和积分形式分别为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{j}_c + \frac{\partial D}{\partial t}; \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{j}_c + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3)$$

式(3)表明传导电流和时变电场(电位移矢量)都会激发涡旋磁场, 均为感生磁场的涡旋源. 第2个方程, 即电磁感应定律, 其微分和积分形式分别为

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4)$$

式(4)表明随时间变化的磁场将会激发涡旋电场, 它是感生电场的涡旋源. 第3个方程是电场的高斯定律, 其微分和积分形式分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (5)$$

式(5)表明了电场是有散场, 电场可以由电荷产生. 第4个方程是磁场的高斯定律, 也称为磁通连续性方程, 其微分和积分形式分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (6)$$

式(6)表明了磁场是无散场, 即不存在磁荷(磁单极), 即磁力线总是闭合曲线.

麦克斯韦方程由上述4个方程组成, 每个方程的物理意义都很明确. 式(3)~(4)的2个旋度方程揭示了电与磁之间相互转化和对立统一的性质, 从而可以发生能量交换和储存, 这意味着电磁波动. 也

就是说,假如场源激发了电磁波,即使场源不再存在,电场和磁场仍可相互激发,以有限的速度向远处传播.式(5)~(6)的2个旋度方程左边是空间旋度,右边是时间导数,揭示了电场或磁场在某一地点的变化会转化成磁场或电场的变化,反之亦然.正是这种空间和时间的相互转化构成了电磁波动的外在形式,电磁波的预言奠定了无线电技术的理论基础.此外,麦克斯韦方程表明了电磁场和它们的场源之间的全部关系,即除了真实电流外,变化的电场(位移电流)也是磁场的源;除电荷外,变化的磁场也是电场的源.麦克斯韦方程组是宏观电磁现象的总规律.因此,麦克斯韦方程组一方面揭示了电磁场的运动规律,另一方面揭示了电磁场可以独立于电荷之外而存在,从而加深了我们对电磁场物质性的认识.

3 讲授麦克斯韦方程组的方法和要点

在麦克斯韦方程组的教学中,需要抓住一些要点和利用一些方法,把容易引起学生困惑和误解的内容进一步地分析和解释.

首先,善用类比和对偶的方法.例如,通过电磁场与流体场的类比研究,引入电力线或磁力线的概念;借用流体的通量与环流来引入电磁通量和环量,使抽象的概念具体化,从而打开局面,取得有效的教学进展.利用对偶性的思路引进电磁感应概念和电磁感应定律的想法,把电场与磁场的互感关系组成对偶体系.这样有助于学生进行对偶式联想,从而可以节省推导和增强学生的记忆理解,取得更高的教学效率;同时也向学生提供一种科学分析的思路(或方法),即对偶法,以便去研究新现象和规律.

其次,在麦克斯韦方程的讲解中要抓住一些要点和注意一些问题:(1)抓住位移电流和涡旋电场这2个核心概念,通过仔细分析把电与磁的互感问题讲清楚.(2)注意强调2个旋度方程之间和2个散度方程之间是不对称的,比如全电流定律右侧有2项,而电磁感应定律右侧只有1项.原因是自然界存在电荷和电流,却不存在磁荷和磁流,至少目前没有发现.(3)当麦克斯韦方程组应用于介质时,先建立介质方程,可以详尽讨论电荷和电流的划分,准确阐述极化和磁化的含义,使学生比较全面地认识电磁场与实物相互作用的效应.还要注意电位移与磁场强度的解释,让学生知道它们的引入是为了消除麦克斯韦方程中未知或无法测量的极化电荷或电流以及磁化电

流.如果自由电荷和传导电流中也包括未知的部分,就涉及场源的分解方式以及不同分解方式下麦克斯韦方程的形式.

最后,让学生对麦克斯韦方程组形成系统认识.在讲授麦克斯韦方程组的建立过程,可以提供很好的机会,帮助学生系统回顾和比较静电场、涡旋电场和磁场、变化电场和磁场的性质和特征,认清异同和联系,有助于理解方程组中各物理量的含义与适用范围.更重要的是,让学生认识到电磁场的内在联系,以及理解如何把各方程整合成麦克斯韦方程组,掌握电磁场的性质和电磁场运动变化所遵循的规律.

4 麦克斯韦电磁理论的重要意义

麦克斯韦方程组是电磁学的一套完整的理论体系^[1-3].从历史发展来看,19世纪中期麦克斯韦方程组不仅对电磁学领域已有的研究成果作了很好的总结,而且为进一步的电磁研究提供了理论基础,从而迎来了19世纪末期至今电磁学全面蓬勃发展的新局面.麦克斯韦电磁理论的建立开辟了许多新的研究课题和方向,例如电子和通讯事业的迅速发展等,对人类科学技术进步和物质文化生活繁荣起了重要作用.光的电磁理论也是麦克斯韦电磁场理论的一个重大成果,实现了光学与电磁学的统一认识.此外,麦克斯韦电磁理论结束了之前的关于电磁本质的近距说和超距说的纷争,印证了电磁作用的近距观点,即没有直接接触的电磁物体之间以电磁场传递电磁作用,这个传递过程是需要时间的.麦克斯韦电磁理论的历史意义还在于引起了物理实在观念的深刻变革:电磁场是一种不同于实物粒子的客观存在,具有物质实在性,加深了人类对世界和物质的认识.

总之,麦克斯韦方程组的教学是电磁学、电磁场与电磁波、电动力学等学科教学中的一个重要部分.本文对麦克斯韦方程组中2个核心概念、方程组的物理内涵与意义、以及教学方法和注意事项分别进行了探讨.希望能给从事相关教学工作的同行有所启示.

参考文献:

- [1] 郭硕鸿.电动力学[M].北京:高等教育出版社,1998.
- [2] 丁君.工程电磁场与电磁波[M].北京:高等教育出版社,2005.
- [3] 梁灿彬.电磁学[M].北京:高等教育出版社,2012.