2010年 8月
Aug 2010

华南师范大学学报 (自然科学版)
JOURNAL OF SOUTH CHINA NORMAL UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE EDITION)

2010年第 3期
No. 3, 2010

文章编号: 1000-5463(2010)03-0015-04

关于分担集的正规定理

张晓梅, 孙道椿*
(华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631)

摘要: 用几何方法研究了更广泛的拟亚纯映射. 利用关于覆盖曲面的不等式, 较简单地证明了关于分担集的正规定理. 由于亚纯函数是拟亚纯映射的特例, 因此所得结论对亚纯函数均成立.

关键词: 拟亚纯映射; 覆盖曲面; 正规族
中图分类号: O174.52　　文献标志码: A

设 $D\subset \mathbb{C}$ 是复平面上的一个区域, F是 D 上的一族复函数. 设 V 是直径为 1的球面, 通过球极投影与闭复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 一一对应. 设 $f\in F$, $a\in V$, 记 $\overline{E}(f, a, D):=\{z\in D;\ f(z)=a\}$, 若对任意 $f, g\in F$, 恒有 $\overline{E}(f, a, D)=\overline{E}(g, a, D)$, 则称 a 是F的一个分担值.

设 $S\subset V$ 是一个非空的有限点集, 记 $\overline{E}(f, S, D):=\bigcup_{a\in S}\overline{E}(f, a, D)$, 若对任意 $f, g\in F$, 恒有 $\overline{E}(f, S, D)=\overline{E}(g, S, D)$, 则称 S 是F的一个分担集.

关于分担值的正规定理, 有不少文章研究[1-5]. 2008年 6月在绍兴召开的全国复分析会议上, 听了方明亮教授的报告, 受到启发, 回来用覆盖曲面的几何方法, 对更广泛的拟亚纯映射, 证明了关于分担集的正规定理, 这些定理对亚纯函数也都成立.

1 定义

定义 1[6] 记直径为 1的 Riemann球面为 V, 设复函数 $f(z)$是区域 $D\subset V-\{\infty\}$到 $D'\subset V$的同胚. 若

(i)在 D 内的任一矩形 $\{z=x+iy;\ a<x<b, c<y<d\}$中, 对 (a, b)内 a. e. (几乎处处)的 x, $f(x+iy)$是 y的绝对连续函数; 对 (c, d)内 a. e. 的 y, $f(x+iy)$ 是 x的绝对连续函数.

(ii)存在 $K>1$, 使得$f(z)$在 D 内 a. e.适合

$$|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)|\leqslant K(|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)|),$$

则称 f 是 D 内的 K-拟共形映射.

定义 2[7-8] 设 $f(z)$是区域 D 内的复值连续函数. 若对任意点 $z_0\in D$, 存在 z_0的邻域 $U\subset D$ 与一正整数 $n=n(z_0)\geqslant 1$, 使得在 U 上

$$g(z)=\begin{cases}(f(z))^{\frac{1}{n}}, & f(z_0)=\infty,\\ (f(z)-f(z_0))^{\frac{1}{n}}+f(z_0), & f(z_0)\neq\infty\end{cases}$$

是K-拟共形映射, 则称f是区域 D 上的K-拟亚纯映射, 记为$f\in Q_K(D)$, 称 n是 z_0的重数. 它是通常亚纯函数的推广.

定义 3 设 F是区域 D 内一族 K-拟亚纯映射. 若F中每一列 K-拟亚纯映射 $\{f_i\}$恒含有在 D 内内闭一致收敛(按球距)的子列, 即对 D 内任意闭集 Q 与F中任一列 K-拟亚纯映射 $\{f_i\}$恒含有在 Q 内一致收敛(按球距)子列, 则称F在 D 内正规.

定义 4 设 F是区域 D 内一族 K-拟亚纯映射. F称为在 D 内等度连续, 若对 D 内任意闭集 Q 与任意 $\varepsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使得对于任意的 $f\in F$以及 Q 上任意两点 z_1、z_2, 只要 $|z_1, z_2|<\delta$, 便有 $|f(z_1), f(z_2)|<\varepsilon$.

本文中一些 Nevanlinna理论的常用术语、记号请参见文献[9]、[10]. 文中用 $|a, b|$表示 $a, b\in V$二点间的球面距离; 用 $|D|$表示区域 D 的球面面积; 用 $f(D)$表示区域 D 到 V的值域, $f(D):=\{f(z);\ z\in D\}$; 用 (D, f)表示区域 D 通过拟亚纯函数 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$到球面 V上的覆盖曲面. 若 $D(r):=$

收稿日期: 2009-06-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871076)
作者简介: 张晓梅(1981—), 女, 湖北天门人, 华南师范大学 2006级博士研究生, 主要研究方向: 函数论, Email: meizi_de@yahoo.com.cn; 孙道椿(1943—), 男, 江西南昌人, 华南师范大学教授, 博士生导师, 主要研究方向: 函数论, Email: sundch@scnu.edu.cn.
* 通讯作者

$\{|z|<r\}$, $z=re^{i\theta}$, 则 $(D(r),f)$ 对 V 的平均覆盖次数为

$$S(r,f)=\frac{|(D(r),f)|}{|v|}=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{u_xv_y-v_xu_y}{(1+|f|^2)^2}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

$(D(r),f)$ 的边界长为

$$L(r,f)=\int_0^{2\pi}\frac{(u_xv_y-v_xu_y)^{\frac{1}{2}}}{1+|f|^2}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r.$$

2 主要结果及证明

引理 1[11] 设 F_0 是球面 V 上的连通区域, 其边界是 $q\geqslant 0$ 个小圆(可能蜕化为点). 当 $q\geqslant 2$ 时, 设任意 2 个小圆间的距离不小于 $\delta(>0)$, 则对任何有限连通的覆盖曲面 F, 恒有

$$\rho^+(F)\geqslant\rho(F_0)S-2^5\delta^{-3}\pi^2L,$$

其中 $\rho(F)$ 表示 F 的特征数, $\rho^+(F)=\max\{\rho,0\}$, S 表示 F 对 F_0 的平均覆盖次数, L 是 F 的相对边界长度.

引理 2[7] 设 $f(z)$ 是 $|z|<R$ 内的 K-拟亚纯映射, 则对于 $r\in(0,R)$ 有

$$L^2(r)\leqslant 2^5K\pi^2r\frac{\mathrm{d}S(r,f)}{\mathrm{d}r},\ \text{a. e.}$$

其中 $L(r)$ 表示覆盖曲面 $F_r=f(|z|<r)$ 在 V 上边界曲线的长度.

定理 1 设 $f(z)$ 为 $|z|<R$ 内的 K-拟亚纯映射, $b_1,b_2,\cdots,b_q\in V$ 是 $q\geqslant 3$ 个不同的有限或无限复数. 则对任意 $r\in(0,R)$,

$$(q-2)S(r,f)<\max\{0,(\sum_{t=1}^{q}\overline{n}(R,f=b_t))-1\}+\frac{2^{15}K\pi^6}{\delta^6(\log R-\log r)},\tag{1}$$

其中 $\overline{n}(R,f=b)$ 表示 $|z|<R$ 内 $f(z)-b$ 的零点个数(不计重数); $\delta=\min\{|b_i,b_j|;i\neq j,i,j=1,2,\cdots,q\}$.

证明 用 F_0 表示从球面 V 上挖去 q 个点 $b_1,b_2,\cdots,b_q$ 后剩下的区域. 注意 $\rho(F_0)=q-2$ 从 $|z|<r$ 内挖去 $\prod_{t=1}^{q}(f(z)-b_t)$ (若 $b_j=\infty$, 则将 $f(z)-b_j$ 换成 $1/f(z)$)的所有零点. 记剩下的区域为 D_r. 用 $F_r:=f(D_r)$ 表示 D_r 通过 $f(z)$ 到 F_0 的覆盖曲面. 由引理 1, 有

$$\rho^+:=\max\{0,(\sum_{t=1}^{q}\overline{n}(R,f=b_t))-1\}\geqslant(q-2)S-2^5\delta^{-3}\pi^2L.$$

i) 若对任何 $p\in(r,R)$ 恒有 $S(p,f)-\rho^+\geqslant 0$ 结合引理 2 有

$$((q-2)S(p,f)-\rho^+)^2<\frac{2^{10}\pi^4}{\delta^6}L_p^2<\frac{2^{15}K\pi^6}{\delta^6}p\frac{\mathrm{d}S(p,f)}{\mathrm{d}p}$$

$$\Rightarrow\log R-\log r=\int_r^R\frac{\mathrm{d}p}{p}<\frac{2^{15}K\pi^6}{\delta^6}\frac{1}{(q-2)S(p,f)-\rho^+}.$$

$$(q-2)S(p,f)<\max\{0,(\sum_{t=1}^{q}\overline{n}(R,f=b_t))-1\}+\frac{2^{15}K\pi^6}{\delta^6(\log R-\log r)}.$$

ii) 若存在 $p\in(r,R)$, 使 $(q-2)S(p,f)-\rho^+<0$ 则

$$(q-2)S(r,f)<(q-2)S(p,f)<\max\{0,(\sum_{t=1}^{q}\overline{n}(R,f=b_t))-1\}.$$

式(1)也成立. 证毕.

引理 3 设 $f(z)$ 为圆域 $D(R,z_0)=\{z\in V_z;|z,z_0|<R\}\subset V_z$ 内的亚纯函数, $\{b_t\}_{t=1}^{q}\subset V$ 是 $q(\geqslant 3)$ 个不同的有限或无限复数. 若

$$\max\{0,(\sum_{t=1}^{q}\overline{n}(R,f=b_t))-1\}=0,$$

则对任意 $\varepsilon\in(0,1/2)$, 当 $3r\in(0,r_0=Re^{-c^2/\varepsilon^2})$ 时, 对任意 $u,v\in\{|z,z_0|<r\}$, 恒有

$$|f(u),f(v)|<\varepsilon.$$

证明 由定理 1, 若令 $r_0=Re^{-c^2/\varepsilon^2}<R$, 则对 $r\leqslant r_0$, 值域 $f(D(r,z_0))$ 及像曲面 $(D(r,z_0),f)$ 在 V 上的面积有

$$|f(D(r,z_0))|\leqslant\pi S(r,f)<\varepsilon^2\pi<\frac{\pi}{2}.\tag{2}$$

记覆盖曲面 $(D(r,z_0),f)$ $(r<r_0)$ 的边界为 $l(r)$, 它在 V 上的长度为 $L(r)$. 记

$$\begin{aligned}d_1(r)&:=\sup\{|f(p),f(q)|;p,q\in D(r,z_0)\},\\ d(r)&=\min(d_1(r),1).\end{aligned}\tag{3}$$

下面先证明

$$d(r)<L(r).\tag{4}$$

若 $L(r)\geqslant 1$ 时, 式(4)显然成立. 若 $L(r)<1$ $(r<r_0)$, 则边界曲线 l_r 完全落在 V 的某半球面 $\overline{V}$ 内[9]. 结合式(2), $f(D(r,z_0))\subset\overline{V}$ 内. 在 $f(D(r,z_0))$ 的边界上取 $p,q\in\partial D(r,z_0)$, 使

$$|f(p),f(q)|=\sup\{|f(u),f(v)|;u,v\in D(r,z_0)\}.$$

因此对任意 $u,v\in D(r,z_0)$, 有

$$|f(u),f(v)|\leqslant|f(p),f(q)|\leqslant L(r)<1.$$

由 u,v 的任意性, 得 $d(r)<L(r)$. 注意 $d(r)$ 对 r 是非减的. 对任意 $3r<r_0$,

$$d^2(r)\ln 3\leqslant\int_r^{3r}\frac{d^2(t)}{t}\mathrm{d}t\leqslant\int_r^{3r}\frac{L^2(t)}{t}\mathrm{d}t\leqslant c\int_r^{3r}\mathrm{d}S(t,f)\leqslant$$

$$cS(3r,f)\leqslant c\frac{c}{\ln R-\ln(3r)}\leqslant\frac{c^2}{\ln R-\ln r_0}\leqslant\varepsilon^2.$$

上面第 2个不等式是由于式(4); 第 3个不等式是由于引理 2; 第 5个不等式是由于定理 1. 结合式(3), 就得到引理 3.

定理 2 设F是域D内的一族K-拟亚纯映射, 则F在D内正规的充分必要条件是F在D内等度连续.

证明 充分性: 设$\{f_t\}\subset F$是任一序列, $H=\{h_v\}\subset D$是D上一个稠密的可列集. 选择子序列不妨仍记为$\{f_t\}$, 使它在H上处处收敛. 设F在D等度连续. 对任意闭集$Q\subset D$及任意$\varepsilon>0$, 记Q到D的边界∂D间的距离为$\sigma>0$, 存在$\delta\in(0,\sigma)$, 使得对任意$f\in F$及Q上任意两点A, B, 只要$|A, B|<\delta$便有

$$|f(A), f(B)|<\varepsilon. \tag{5}$$

选取有限个球$\{B(\delta, P_t)\}$ ($t=1, 2, \cdots, N$; $P_t\in Q\cap H$), 使

$$D\supset\bigcup_{t=1}^{N}B(\delta, P_t)\supset Q. \tag{6}$$

可以看出存在$M>0$, 当$p, q>M$时, 对任意$A\in\{P_t\}_{t=1}^{N}$, 有

$$|f_p(A), f_q(A)|<\varepsilon. \tag{7}$$

为证$\{f_u\}_{u=1}^{\infty}$在Q上一致收敛, 对任意点$B\in Q$, 由式(6), 存在$A\in\{P_t\}_{t=1}^{N}$, 使$|A, B|<\delta$. 当$p, q>M$时, 结合式(5)、(7), 有

$$|f_p(B), f_q(B)|<|f_p(B), f_p(A)|+|f_p(A), f_q(A)|+|f_q(A), f_q(B)|<3\varepsilon.$$

这说明存在子序列在Q上一致收敛.

必要性: 设F在D内不等度连续, 即存在$\varepsilon_0>0$及闭区域$Q\subset D$(仍记Q到∂D间的距离为$\sigma>0$). 对任何$t>1$, 总存在$f_t\in F$及Q上 2个不同的点A_t和B_t, 满足$|A_t, B_t|<1/t$, 但是

$$|f_t(A_t), f_t(B_t)|>\varepsilon_0. \tag{8}$$

若F在D内正规, 选取子列, 不妨仍记为$\{f_t\}$, 在Q上一致收敛, 故可取M充分大, 使对任意$t>M$及$Z\in Q$, 有

$$|f_t(Z), f_M(Z)|<\varepsilon_0/3. \tag{9}$$

由定理 1, f_M在Q上一致连续, 于是存在$\delta>0$, 对任意$A_t, B_t\in Q$, 只要$|A_t, B_t|<\delta$, 则有$|f_M(A_t), f_M(B_t)|<\varepsilon_0/3$. 结合式(9), 有

$$|f_t(A_t), f_t(B_t)|<|f_t(A_t), f_M(A_t)|+|f_M(A_t), f_M(B_t)|+|f_M(B_t), f_t(B_t)|<\varepsilon_0.$$

这与式(8)矛盾.

定理 3 设F是区域$D\subset C$内的一族K-拟亚纯映射, $S\subset V$是F的一个分担集. 若S中至少有 3个点, 即$3\leqslant\#(S)<\infty$, 则F在D内正规.

证明 令$\delta=\min\{|a, b|;\ a, b\in S,\ a\neq b\}$. 任取闭集$Q\subset D$. 由分担集的定义, 对任意$f\in F$,

$$\overline{E}(F, S, G)=\overline{E}(f, S, G)$$

是有限点集.

则对任意$z_0\in G$, 在区域$B:=\{|z, z_0|<r\}$内, 至多含$\overline{E}(F, S, G)$中的一个点. 于是对每一个$f\in F$, 在区域B内, $f(z)$取S中点的总次数$\sum_{b\in S}\overline{n}(r, f=b)\leqslant 1$. 由引理 3, 可看出$F$在$B$内等度连续. 由定理 2, F在B内正规. 因此F在G内正规. 最终F在D内正规.

由于亚纯函数也是K拟亚纯映射. 故

推论 1 设F是区域$D\subset C$内的一族亚纯函数. $S\subset V$是F的一个分担集. 若S中至少有 3个点, 即$3\leqslant\#(S)<\infty$, 则F在D内正规.

若F有 3个不同的分担值a, b, c, 则$S=\{a, b, c\}$是分担集. 故

推论 2 设F是域$D\subset V$内的一族亚纯函数. 若F有 3个不同的分担值, 则F在D内正规.

推论 3 设F是域$D\subset V$内的一族K-拟亚纯映射. 若存在 3个不同的复数$a, b, c\in V$, 使得对任意$f\in F$, 在D内恒不取a, b, c, 则F在D内正规.

参考文献:

[1] 孙道椿. 关于分担值的正规定则[J]. 武汉大学学报: 自然科学版, 1994(3): 9-12.
SUN Daochun. On the normal criterion of share value[J]. Journal of Wuhan University: Natural Science Edition, 1994(3): 9-12.

[2] FANG M L, XU Y. Normal families of holomorphic function and shared values[J]. Israel J Math, 2002, 129: 125-141.

[3] PANG X C. Shared values and normal families[J]. Analysis, 2002, 22: 175-182.

[4] LI J T, YI H X. Normal families and shared values of holomorphic function[J]. Appl Math J Chinese Univ: Ser B, 2006, 21(3): 335-342.

[5] 张庆德, 秦春艳. 亚纯函数的正规族与分担值[J]. 数学学报, 2008, 51(1): 145-152.
ZHANG Qingde, QIN Chunyan. Normal familles and shared values of meromorphic functions[J]. Acta Mathematica Sinica, 2008, 51(1): 145-152.

[6] 李忠, 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1988.

[7] SUN Daochun, YANG Lo. Value distribution of quasiconformal mappings[J]. Complex Variables, 1997, 34: 219-229.

[8] 孙道椿. 拟共形映射族[J]. 华南师范大学学报: 自然

科学版, 2001(1): 1-7.

SUN Daochun. Family of quasi conformal mappings[J]. Journal of South China Normal University: Natural Science Edition, 2001(1): 1-7.

[9] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社, 1982.

[10] 顾永兴. 亚纯函数的正规族[M]. 成都:四川教育出版社, 1991.

[11] SUN Daochun. Main theorem on covering surfaces[J]. Acta Math Sci, 1994, 14(2): 213-225.

NORMAL THEOREMS ON SHARE SETS

ZHANG Xiaomei, SUN Daochun

(School of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: More extensive quasi-meromorphic mappings are discussed by the method of geometry. Normal theorems on share sets are approved simply by an inequality about covering surface. The conclusions in this paper are valid for meromorphic functions because a meromorphic function is a special case of quasi-meromorphic mapping.

Key words: quasi-meromorphic mapping; covering surface; normal family

【责任编辑 庄晓琼】

(上接第14页)

[6] 刘名生, 石莉芬. 星像函数和关于 k 折对称点近于凸函数的一些充分条件[J]. 华南师范大学学报:自然科学版, 2007(3): 1-7.

LIU Mingsheng, SHI Lifen. Some sufficient conditions for starlike and close-to-convex functions with respect to k-symmetric points[J]. Journal of South China Normal University: Natural Science Edition, 2007(3): 1-7.

[7] 宋年胜, 刘名生. 两类解析函数子类的包含关系和卷积性质[J]. 华南师范大学学报:自然科学版, 2008(4): 32-37.

SONG Niansheng, LIU Mingsheng. Inclusion relation and convolution properties for two subclasses of analytic functions[J]. Journal of South China Normal University: Natural Science Edition, 2008(4): 32-37.

[8] OWA S, NISHIWAKI J. Coefficient estimates for cettain classes of analytic functions[J]. J Inequal Pure Appl Math, 2002, 3(5): Article 72, 5pp.

[9] MILLER S S, MOCANU P T. Diffierential subordinations and inequalities in the complex plane[J]. J Differ Equations, 1987, 67: 199-211.

[10] MA W, MINDA D. A unified treatment of some special classes of univalent functions[C]// LI Z, REN F, YANG L. Proceedngs of the Conference on Complex Analysis. Cambridge, Massachusetts: International Press, 1994: 157-169.

PROPERTIES AND CHARACTERISTICS OF CERTAIN SUBCLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS

LIU Zhiwen, LIU Mingsheng

(School of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: Some interesting properties of a subclass $M_n(\alpha, \beta)$ of analytic functions are investigated. Several inclusion relations, coefficient estimates, Fekete-Szegö inequality are proven here for this function class.

Key words: analytic functions; inclusion relations; coefficient estimates; Fekete-Szegö inequality

【责任编辑 庄晓琼】