文章编号: 1000-5463(2014)S2-0036-04

集合的对称差运算及其产生的和式

庄丽纯*
(汕头市第一中学, 汕头 515065)

摘要:深入地研究了任意多个集合的对称差的定义,揭示了任意多个集合的对称差的构造,$A_1\Delta\cdots\Delta A_m(m\geqslant 2)$是由恰属于$A_1,\cdots,A_m$中奇数个集合的那些元素组成,并运用组合计数理论计算集合的对称差运算所产生的和式.

关键词:集合; 对称差; 和式

众所周知,集合论是全部数学的基础,集合的对称差是集合之间的一种重要运算,而且在很多数学分支中都有着广泛的运用. 本文将从 2 个集合的对称差定义出发,推广到任意多个集合的对称差定义,揭示其构造,即 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m(m\geqslant 2)$ 是由恰属于 $A_1,\cdots,A_m$ 中奇数个集合的那些元素组成. 并运用组合计数理论计算集合的对称差所产生的和式

$$S_{m,n}=\sum_{A_1,\cdots,A_m\subset\{1,2,\cdots,n\}}|A_1\Delta\cdots\Delta A_m|=n\cdot 2^{mn-1}(m\geqslant 2),$$

$$G_{m,n,k}=\sum_{\substack{A_1\Delta\cdots\Delta A_m=\{1,2,\cdots,k\}\\ A_1,\cdots,A_m\subset\{1,2,\cdots,n\}}}(|A_1|+\cdots+|A_m|)=mn\cdot 2^{(m-1)n-1}\ (m\geqslant 2,0\leqslant k\leqslant n).$$

1 集合的对称差及其构造

这里把参与运算的集合看成某个集合 S 的一些子集. A 是 S 的子集,记为 $A\subset S$.

定义 1[1] 设 A,B 是集合 S 的 2 个子集,称$(A-B)\cup(B-A)$为 A,B 的对称差,并记为 $A\Delta B$. 明显地,$A\Delta B$ 是由恰属于 A,B 之一的那些元素组成.

定义 2 设 $A_1,\cdots,A_m\subset S,m\geqslant 3$,称 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m=(A_1\Delta\cdots\Delta A_{m-1})\Delta A_m$ 为 m 个集合的对称差. $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 是由恰属于 $A_1,\cdots,A_m$ 中奇数个集合的那些元素组成. 证明详见定理 2.

由定义 1 可推得

定理 1[1] 关于对称差,下述关系式成立:

(1)换律:$A\Delta B=B\Delta A$;

(2)合律:$A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;

(3)$A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$;

(4)$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$;

(5)$A^c\Delta B^c=A\Delta B$;

(6)$A\Delta B=\varnothing\Leftrightarrow A=B$;

(7)$A\Delta B=S\Leftrightarrow A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$.

下面的定理揭示了集合对称差的构造:

定理 2 设 $A_1,\cdots,A_m\subset S,m\geqslant 2$,则 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 是由恰属于 $A_1,\cdots,A_m$ 中奇数个集合的那些元素组成,即

$$A_1\Delta\cdots\Delta A_m=\bigcup_{\substack{1\leqslant k\leqslant[(m+1)/2]\\ \{i_1,\cdots,i_{2k-1},j_1,\cdots,j_{m-2k+1}\}=\{1,2,\cdots,m\}}}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{2k-1}}\cap A_{j_1}^c\cap\cdots\cap A_{j_{m-2k+1}}^c).$$

对 m 用数学归纳法证明是很普遍的. 下面利用集合的特征函数证明,更为简便和独特. 为此,引入集合的特征函数定义:

定义 3[1] 全集 S, $\forall A\subset S$ 的特征函数: $\lambda_A=\begin{cases}1, & 若\ x\in A;\\ 0, & 若\ x\notin A.\end{cases}$

引理 1 $\lambda_{A_1\Delta A_2}\equiv(\lambda_{A_1}+\lambda_{A_2})(\bmod 2)$.

证明 (1)当 $\lambda_{A_1\Delta A_2}=1$ 时,则 $x\in A_1\Delta A_2$,即 $x\in A_1\cup A_2$ 且 $x\notin A_1\cap A_2$,即 $x\in A_1$ 且 $x\notin A_2$ 或 $x\in A_2$ 且 $x\notin A_1$,则 $\lambda_{A_1}=1$ 且 $\lambda_{A_2}=0$ 或 $\lambda_{A_2}=1$ 且 $\lambda_{A_1}=0$,即 $\lambda_{A_1}+\lambda_{A_2}=1$.

(2)当 $\lambda_{A_1\Delta A_2}=0$ 时,则 $x\notin A_1\Delta A_2$,即 $x\notin A_1\cup A_2$ 或 $x\in A_1\cap A_2$,即 $x\notin A_1$ 且 $x\notin A_2$ 或 $x\in A_1$ 且 $x\in A_2$,则 $\lambda_{A_1}=0$ 且 $\lambda_{A_2}=0$ 或 $\lambda_{A_1}=1$ 且 $\lambda_{A_2}=1$,即 $\lambda_{A_1}+\lambda_{A_2}=0$ 或 2,故 $\lambda_{A_1}+\lambda_{A_2}\equiv 0(\bmod 2)$.

利用定理 1(2),容易证得

推论 1 $m\geqslant 2,\lambda_{A_1\Delta\cdots\Delta A_m}\equiv\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_{A_i}\right)(\bmod 2)$.

下面证明定理 2.

收稿日期: 2014-06-15

* 通讯作者:庄丽纯,中学一级教师,Email: 86361274@qq.com.

定理 2 的证明 若$\sum_{i=1}^{m}\lambda_{A_i}\equiv 1(\bmod 2)$，则$\lambda_{A_1},\cdots,\lambda_{A_m}$中有奇数个的值为 1，即 x 属于 $A_1,\cdots,A_m$ 中的奇数个集合，反之也成立. 即 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 是属于 $A_1,\cdots,A_m$ 中的奇数个集合的那些元素组成.

推论 2 设 $A_1,\cdots,A_m\subset S,m\geqslant 2$，则 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 可分解为 2^{m-1}个两两不交的集合的并集.

相应地，容易得到

推论 3 设 $A_1,\cdots,A_m\subset S,m\geqslant 2$，则$(A_1\Delta\cdots\Delta A_m)^c$ 是由恰属于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中偶数个集合的那些元素组成，即

$$(A_1\Delta\cdots\Delta A_m)^c=\bigcup_{\substack{1\leqslant k\leqslant[(m+2)/2]\\ \{i_1,\cdots,i_{2k-2},j_1,\cdots,j_{m-2k+2}\}=\{1,2,\cdots,m\}}}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{2k-2}}\cap A_{j_1}^c\cap\cdots\cap A_{j_{m-2k+2}}^c).$$

推论 4 设 $A_1,\cdots,A_m\subset S,m\geqslant 2$，则$(A_1\Delta\cdots\Delta A_m)^c$ 可分解为 2^{m-1}个两两不交的集合的并集.

2 集合的对称差所产生的和式

集合的对称差运算产生了一系列的和式，下面运用组合计数理论研究几个较重要的问题.

以下考虑全集为 $N_n=\{1,2,\cdots,n\}$.

问题 1 设 $A_1,\cdots,A_m\subset N_n,m\geqslant 2$，求所有 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 的元素个数之和

$$S_{m,n}=\sum_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n}|A_1\Delta\cdots\Delta A_m|.$$

设$|A_1\Delta\cdots\Delta A_m|=i\quad(0\leqslant i\leqslant n)$，由推论 2 及推论 4 可知满足条件：$|A_1\Delta\cdots\Delta A_m|=i$ 且 $A_1,\cdots,A_m\subset N_n$ 的有序 m 集组$(A_1,\cdots,A_m)$的个数为$\binom{n}{i}2^{(m-1)n}$.

从而

$$S_{m,n}=\sum_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n}|A_1\Delta\cdots\Delta A_m|=\sum_{i=0}^{n}\sum_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n}i=\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}2^{(m-1)n}=2^{(m-1)n}\cdot n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^{mn-1}.$$

故有

定理 3 $A_1,\cdots,A_m\subset N_n,m\geqslant 2$，以 $S_{m,n}$表示所有 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 的元素个数之和，则

$$S_{m,n}=\sum_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n}|A_1\Delta\cdots\Delta A_m|=n\cdot 2^{mn-1}\quad(m\geqslant 2).$$

以下给出定理 3 的一种组合解释.

任意选定 $a\in N_n$，若 $a\in A_1\Delta\cdots\Delta A_m$，则 $a\in A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_{2k-1}},1\leqslant k\leqslant[(m+1)/2]$且$\{i_1,i_2,\cdots,i_{2k-1}\}\subset\{1,2,\cdots,m\}$，而 N_n 中除 a 以外的 $n-1$ 个元素可能属于也可能不属于 $A_1,\cdots,A_m$. 从而，a 在所有 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 中出现的次数为 $\sum_{k=1}^{[(m+1)/2]}\binom{m}{2k-1}(2^m)^{n-1}=2^{m-1}\cdot 2^{mn-m}=2^{mn-1}$. 所有 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 的元素个数之和等价于 N_n 中每一个元素在所有 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m$ 中出现的次数之和，故 $S_{m,n}=n\cdot 2^{mn-1}$.

问题 2 $A_1,\cdots,A_m\subset N_n,m\geqslant 2$，求所有满足 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k$ 的 $A_1,\cdots,A_m$ 的元素个数之和，即

$$G_{m,n,k}=\sum_{\substack{A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k\\ A_1,\cdots,A_m\subset N_n}}(|A_1|+\cdots+|A_m|).$$

先计算 $G_{2,n,k}=\sum_{\substack{A_1\Delta A_2=N_k\\ A_1,A_2\subset N_n}}(|A_1|+|A_2|)$. 其中，最简单的是 $G_{2,n,2}=\sum_{\substack{A_1\Delta A_2=\{1,2\}\\ A_1,A_2\subset N_n}}(|A_1|+|A_2|)$.

结合图 1 分析，假设$|A_1\cap A_2|=i\quad(0\leqslant i\leqslant n-2)$，容易得到

$$G_{2,n,2}=\sum_{\substack{A_1-A_2=\varnothing\\ A_2-A_1=\{1,2\}}}(|A_1|+|A_2|)+\sum_{\substack{A_1-A_2=\{1\}\\ A_2-A_1=\{2\}}}(|A_1|+|A_2|)+\sum_{\substack{A_1-A_2=\{2\}\\ A_2-A_1=\{1\}}}(|A_1|+|A_2|)+\sum_{\substack{A_1-A_2=\{1,2\}\\ A_2-A_1=\varnothing}}(|A_1|+|A_2|)=8\left[\sum_{i=0}^{n-2}i\binom{n-2}{i}+\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\right]=8\left[\sum_{i=1}^{n-2}(n-2)\binom{n-3}{i-1}+\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\right]=8[(n-2)\cdot 2^{n-3}+2^{n-2}]=n\cdot 2^n.$$

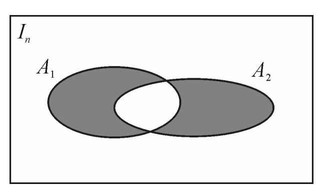

图 1

进一步分析 $A_1\Delta A_2=N_k$ 的情形，在图 1 中，假设$|A_1-A_2|=i\quad(0\leqslant i\leqslant k)$，则$|A_2-A_1|=k-i$. 又设$|A_1\cap A_2|=j\quad(0\leqslant j\leqslant n-k)$. 此时，$|A_1|=i+j$，$|A_2|=k-i+j$，则满足 $A_1\Delta A_2=N_k,A_1,A_2\subset N_n$ 的有序集对(A_1,A_2)的个数为 $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}$.

$$G_{2,n,k}=\sum_{\substack{A_1\Delta A_2=N_k,\\ A_1,A_2\subset N_n}}(|A_1|+|A_2|)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}(i+j+k-i+j)=$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{j=0}^{n-k}(2j+k)\binom{n-k}{j}=2^{k}\left[2\sum_{j=0}^{n-k}j\binom{n-k}{j}+k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\right]=2^{k}[2(n-k)\cdot 2^{n-k-1}+k\cdot 2^{n-k}]=n\cdot 2^{n}.$$

由于 $G_{2,n,k}=G_{2,n,2}$,故 $G_{2,n,k}$ 是一个与 k 无关的数. 下面给出一种组合解释.

注意到,若 A_1,A_2 遍及 N_n 的所有子集,则 A_1^c,A_2^c 也遍及 N_n 的所有子集,以及 $A_1^c\Delta A_2^c=A_1\Delta A_2$(定理 1(5)),故

$$G_{2,n,k}=\sum_{\substack{A_1^c\Delta A_2^c=N_k\\ A_1^c,A_2^c\subset N_n}}(|A_1^c|+|A_2^c|)=\sum_{\substack{A_1\Delta A_2=N_k\\ A_1,A_2\subset N_n}}(|A_1^c|+|A_2^c|).$$

这就有了

$$G_{2,n,k}=\frac{1}{2}\left[\sum_{P}(|A_1|+|A_2|)+\sum_{P}(|A_1^c|+|A_2^c|)\right]=\frac{1}{2}\sum_{P}(|A_1|+|A_2|+|A_1^c|+|A_2^c|)=\frac{1}{2}\sum_{P}2n=n\cdot 2^{n},$$

其中 P 表示 $A_1\Delta A_2=N_k$ 且 $A_1,A_2\subset N_n$.

以下仿照 $G_{2,n,k}$ 计算 $G_{3,n,k}$. 由定理 2 及推论 3 可得

$$A_1\Delta A_2\Delta A_3=(A_1\cap A_2^c\cap A_3^c)\cup(A_2\cap A_1^c\cap A_3^c)\cup(A_3\cap A_1^c\cap A_2^c)\cup(A_1\cap A_2\cap A_3),$$

$$(A_1\Delta A_2\Delta A_3)^c=(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)\cup(A_1\cap A_2\cap A_3^c)\cup(A_1\cap A_3\cap A_2^c)\cup(A_2\cap A_3\cap A_1^c).$$

图 2 中,阴影部分表示 $A_1\Delta A_2\Delta A_3=N_k$,则 $(A_1\Delta A_2\Delta A_3)^c=\{k+1,k+2,\cdots,n\}$.

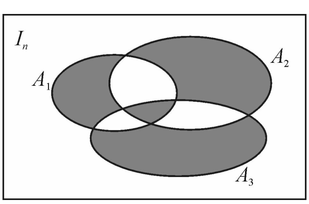

图 2

设 $|A_1\cap A_2^c\cap A_3^c|+|A_2\cap A_1^c\cap A_3^c|+|A_3\cap A_1^c\cap A_2^c|=i$ $(0\leqslant i\leqslant k)$,则 $|A_1\cap A_2\cap A_3|=k-i$. 又设 $|A_1\cap A_2\cap A_3^c|+|A_1\cap A_3\cap A_2^c|+|A_2\cap A_3\cap A_1^c|=j$ $(0\leqslant j\leqslant n-k)$,则满足 $A_1\Delta A_2\Delta A_3=N_k,A_1,A_2,A_3\subset N_n$ 的有序三集组 (A_1,A_2,A_3) 的个数应为

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}3^{i}\sum_{j=o}^{n-k}\binom{n-k}{j}3^{j}.$$

此时

$$|A_1|+|A_2|+|A_3|=|A_1\cap A_2^c\cap A_3^c|+|A_2\cap A_1^c\cap A_3^c|+|A_3\cap A_1^c\cap A_2^c|+2(|A_1\cap A_2\cap A_3^c|+|A_1\cap A_3\cap A_2^c|+|A_2\cap A_3\cap A_1^c|)+3|A_1\cap A_2\cap A_3|=i+2j+3(k-i).$$

故

$$G_{3,n,k}=\sum_{\substack{A_1\Delta A_2\Delta A_3=N_k\\ A_1,A_2,A_3\subset N_n}}(|A_1|+|A_2|+|A_3|)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}3^{i}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}3^{j}[i+2j+3(k-i)]=$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}3^{i}\left[(3k-2i)\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}3^{j}+2\sum_{j=0}^{n-k}j\binom{n-k}{j}3^{j}\right]=$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}3^{i}\left[(3k-2i)\cdot 4^{n-k}+2\cdot 3(n-k)\cdot 4^{n-k-1}\right]=$$

$$6(n+k)\cdot 4^{n-k-1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}3^{i}-2\cdot 4^{n-k}\sum_{i=0}^{k}i\binom{k}{i}3^{i}=$$

$$6(n+k)\cdot 4^{n-k-1}\cdot 4^{k}-2\cdot 4^{n-k}\cdot 3k\cdot 4^{k-1}=6n\cdot 4^{n-1}.$$

同理,可计算

$$G_{4,n,k}=\sum_{\substack{A_1\Delta A_2\Delta A_3\Delta A_4=N_k\\ A_1,A_2,A_3,A_4\subset N_n}}(|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|)=$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{4}{1}^{i}\binom{4}{3}^{k-i}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}\binom{4}{2}^{j}\sum_{l=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{l}\times\binom{4}{4}^{l}[i+2j+3(k-i)+4l]=$$

$$4^{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}6^{j}\sum_{l=0}^{n-k-j}\binom{n-k-j}{l}(3k-2i+2j+4l)=4^{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}6^{j}[(3k-2i+2j)2^{n-k-j}+4(n-k-j)2^{n-k-j-1}]=$$

$$4^{k}2^{n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(2n+k-2i)\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}3^{j}=$$

$$4^{k}\cdot 2^{n-k}\cdot 4^{n-k}\left[(2n+k)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}-2\sum_{i=0}^{k}i\binom{k}{i}\right]=$$

$$4^{k}\cdot 2^{n-k}\cdot 4^{n-k}[(2n+k)\cdot 2^{k}-2k\cdot 2^{k-1}]=n\cdot 2^{3n+1}.$$

至此,我们可以猜想 $G_{m,n,k}$ $(m\geqslant 2,0\leqslant k\leqslant n)$.

由于 $G_{2,n,k}=n\cdot 2^{n}=2n\cdot 2^{n-1}$,$G_{3,n,k}=6n\cdot 4^{n-1}=3n\cdot 2^{2n-1}$,$G_{4,n,k}=n\cdot 2^{3n+1}=4n\cdot 2^{3n-1}$,依此类推,猜测 $G_{m,n,k}=mn\cdot 2^{(m-1)n-1}$ $(m\geqslant 2,0\leqslant k\leqslant n)$.

下面用数学归纳法证明上述猜想.

证明 对 m 用数学归纳法.

1° 奠基是显然的.

2° 假设 $m=s$ 时,结论成立. 即 $G_{s,n,k}=\sum_{P_1}(|A_1|+\cdots+|A_s|)=sn\cdot 2^{(s-1)n-1}$. 令 $A_s\Delta A_{s+1}=B$,则

$$G_{s+1,n,k}=\sum_{P_2}(|A_1|+\cdots+|A_{s+1}|)=$$

$$\sum_{P_3}\sum_{P_4}(|A_1|+\cdots+|A_{s+1}|)=\sum_{P_5}\sum_{P_3}(|A_1|+\cdots+|A_{s+1}|)=$$

$$\sum_{P_5}\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant |B|\\ 0\leqslant j\leqslant n-|B|}}\binom{|B|}{i}\binom{n-|B|}{j}[\,|A_1|+\cdots+|A_{s-1}|+(i+j)+(|B|-i+j)\,]=$$
$$\sum_{P_5}\sum_{i=0}^{|B|}\binom{|B|}{i}\left[(|A_1|+\cdots+|A_{s-1}|+|B|)\times\sum_{j=0}^{n-|B|}\binom{n-|B|}{j}+2\sum_{j=0}^{n-|B|}j\binom{n-|B|}{j}\right]=$$
$$\sum_{P_5}2^{|B|}[\,(|A_1|+\cdots+|A_{s-1}|+|B|)2^{n-|B|}+2(n-|B|)\cdot 2^{n-|B|-1}\,]=2^n\sum_{P_5}(|A_1|+\cdots+|A_{s-1}|+n)=2^n\left[\sum_{P_5}(|A_1|+\cdots+|A_{s-1}|)+n\sum_{P_5}1\right].$$

由于对称性,可得

$$\sum_{P_1}|A_1|=\frac{1}{s}\sum_{P_1}(|A_1|+\cdots+|A_s|)=\frac{1}{s}\cdot sn\cdot 2^{(s-1)n-1}=n\cdot 2^{(s-1)n-1}.$$

从而 $\sum_{P_5}(|A_1|+\cdots+|A_{s-1}|)=(s-1)\sum_{P_1}|A_1|=(s-1)n\cdot 2^{(s-1)n-1}$. 则

$$G_{s+1,n,k}=2^n[\,(s-1)n\cdot 2^{(s-1)n-1}+n\cdot(2^{s-1})^n\,]=(s+1)n\cdot 2^{sn-1},$$

其中 P_1 表示 $A_1\Delta\cdots\Delta A_s=N_k$ 且 $A_1,\cdots A_s\subset N_n$, P_2 表示 $A_1\Delta\cdots\Delta A_{s+1}=N_k$ 且 $A_1,\cdots,A_{s+1}\subset N_n$, P_3 表示 $A_s\Delta A_{s+1}=B$ 且 $A_s,A_{s+1}\subset N_n$, P_4 表示 $A_1\Delta\cdots\Delta A_{s-1}\Delta B=N_k$ 且 $A_1,\cdots,A_{s-1}\subset N_n$, P_5 表示 $A_1\Delta\cdots\Delta A_{s-1}\Delta B=N_k$ 且 $A_1,\cdots,A_{s-1},B\subset N_n$. 即当 $m=s+1$ 时,结论成立.

3° 根据数学归纳法,结论对一切 $m\geqslant 2$ 的自然数都成立.

于是得到

定理4 $A_1,\cdots,A_m\subset N_n$, $m\geqslant 2$, 以 $G_{m,n,k}$ 表示所有满足 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k$ $(0\leqslant k\leqslant n)$ 的 $A_1,\cdots,A_m$ 的元素个数之和,则

$$G_{m,n,k}=\sum_{\substack{A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k\\ A_1,\cdots,A_m\subset N_n}}(|A_1|+\cdots+|A_m|)=mn\cdot 2^{(m-1)n-1}\quad(m\geqslant 2,0\leqslant k\leqslant n).$$

证明 从 N_k 中任选一元素 a, 则 $a\in A_1\Delta\cdots\Delta A_m$, 即 $a\in A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_{2j-1}}$, $1\leqslant j\leqslant[(m+1)/2]$ 且 $\{i_1,i_2,\cdots,i_{2j-1}\}\subset\{1,2,\cdots,m\}$. 根据推论2及推论4,对于 N_k 中除 a 以外的任一元素,都可属于 2^{m-1} 个两两不交的集合中的一个,对于 $\{k+1,k+2,\cdots,n\}$ 中任一元素,也都可属于 2^{m-1} 个两两不交的集合中的一个,则 a 在所有满足 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k$ 的 $A_1,\cdots,A_m$ 中出现的次数为

$$\sum_{j=1}^{[(m+1)/2]}(2j-1)\binom{m}{2j-1}(2^{m-1})^{k-1}(2^{m-1})^{n-k}=m\cdot 2^{m-2}\cdot(2^{m-1})^{n-1}=m\cdot 2^{(m-1)n-1}.$$

同理,从 $\{k+1,k+2,\cdots,n\}$ 中任选一元素 b, 则 $b\notin A_1\Delta\cdots\Delta A_m$, 即 $b\in A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_{2t-2}}$, $1\leqslant t\leqslant[(m+2)/2]$ 且 $\{i_1,i_2,\cdots,i_{2t-2}\}\subset\{1,2,\cdots,m\}$, 则 b 在所有满足 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k$ 的 $A_1,\cdots,A_m$ 中出现的次数为

$$\sum_{t=1}^{[(m+2)/2]}(2t-2)\binom{m}{2t-2}(2^{m-1})^{k}(2^{m-1})^{n-k-1}=m\cdot 2^{m-2}\cdot(2^{m-1})^{n-1}=m\cdot 2^{(m-1)n-1}.$$

所有满足 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k$ 的 $A_1,\cdots,A_m$ 的元素个数之和等价于 N_n 中每一个元素在所有满足 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m=N_k$ 的 $A_1,\cdots,A_m$ 中出现的次数之和,故

$$G_{m,n,k}=k\cdot m\cdot 2^{(m-1)n-1}+(n-k)\cdot m\cdot 2^{(m-1)n-1}=mn\cdot 2^{(m-1)n-1}.$$

集合的对称差是集合之间的重要运算之一,而且在很多数学分支中都有着广泛的运用. 本文深入研究了任意多个集合的对称差的定义,并揭示其构造,即 $A_1\Delta\cdots\Delta A_m(m\geqslant 2)$ 是由恰属于 $A_1,\cdots,A_m$ 中奇数个集合的那些元素组成,使集合的对称差更容易理解把握. 笔者还运用组合计数理论计算集合的对称差运算所产生的几个重要和式并得到其显式,结果是精炼而优美的,可应用于各数学分支.

参考文献:

[1] 单墫. 集合及其子集[M]. 上海:上海教育出版社,2001.

【责任编辑 庄晓琼】