2014 年 1 月
Jan. 2014

华南师范大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF SOUTH CHINA NORMAL UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE EDITION)

第 46 卷第 1 期
Vol. 46 No. 1

文章编号:1000-5463(2014)01-0042-04

求解 KdV 方程和 mKdV 方程的新方法:(g'/g^2)展开法

王思源,陈 浩*
(华南师范大学物理与电信工程学院,广州 510006)

摘要:根据(g'/g^2)展开法求得 KdV 方程和 mKdV 方程的精确解,在不同的情形下,得出双曲函数通解、三角函数通解及有理函数通解. 双曲函数通解中常数项取特殊值时,得出了孤立波解. 利用(g'/g^2)展开法求解 KdV 方程和 mKdV 方程,相比(g'/g)展开等方法,具有简便,易于计算的特点,是求解非线性方程的较好选择.

关键词:(g'/g^2)展开法; KdV 方程; mKdV 方程; 孤立波解; 行波解
中图分类号:O411.1 **文献标志码**:A doi:10.6054/j.jscnun.2013.12.009

A New Method to Solve KdV and mKdV Equations by (g'/g^2) Expansion Method

Wang Siyuan, Chen Hao*
(School of Physics and Telecommunication Enngineering, South China Normal University, Guangzhou, 510006, China)

Abstract: Exact solutions of KdV and mKdV equations can be obtained according to (g'/g^2) expansion method. Three different solutions can be deduced: hyperbolic function solutions, trigonometric function solutions, and rational functional solutions. Solitary wave solutions can be calculated when special values of the hyperbolic function solutions are properly chosen. Having concluded from the solving of both equations, the (g'/g^2) expansion method is a well choice of solving nolinear equations which is more convenient, and easy-calculating than (g'/g) expansion method and other methods mentioned before.

Key words: (g'/g^2) expansion method; KdV equation; mKdV equation; solitary wave solution; traveling wave solution

非线性方程的求解是自然科学,尤其是非线性科学中最重要的部分. 可用来阐述诸多复杂现象,例如规范场理论和量子场论中的磁单极子问题、瞬子问题;固体物理中的极化子问题和铁磁链孤波问题;流体力学中的水波问题等. 近年来,非线性方程的研究热点是寻找新的解法并且得出新的精确解. 一些比较主流的求解方法开始在非线性方程中扮演重要角色,例如 Hirota 双线性展开法[1]、Jacobi 双曲函数展开法[2]、齐次平衡法[3]及(g'/g)展开法等[4].

(g'/g)展开法由 Wang 等[4]于 2008 年首先提出,并得出了 KdV 方程和 mKdV 方程的精确解以及孤立波解. 但是,这种方法存在推导繁琐、冗长等缺点. 接着,Li 等[5]提出了(ω/g)展开法并且利用(g'/g)和(g'/g^2)这 2 种展开方法求得了 Vakhnenko 方程的精确解. 陈继培等[6]用(g'/g^2)展开法求出了非线性 Klein-Gordon 方程的精确通解. 使方法比前一种方法更加简便、有效. 这也同样适用于 KdV 方程和 mKdV 方程的求解.

本文引入并介绍(g'/g^2)展开法的原理及求解过程,研究了 KdV 方程和 mKdV 方程的行波解.

1 (g'/g^2)展开法的主要求解步骤

(g'/g^2)展开法的主要求解步骤[5-6]如下:

第 1 步 假设含独立变量 x、t 的非线性方程可以表示为

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0, \qquad (1)$$

其中 $u=u(x,t)$.

收稿日期:2013-03-25
基金项目:国家自然科学基金项目(10874049)
*通讯作者:陈浩,教授,Email:chenhao@scnu.edu.cn.

第 2 步　对式(1)做行波变换 $u=u(\xi),\xi=x-Vt$,得

$$P(u,u',-Vu',u'',-Vu'',V^2u'',\cdots)=0. \quad (2)$$

第 3 步　假定式(2)的解可以表示为

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i(\frac{g'}{g^2})^i(i=0,1,2,\cdots,n), \quad (3)$$

式中,$g=g(\xi)$满足二阶线性常微分方程

$$\left(\frac{g'}{g^2}\right)'=a+b\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2, \quad (4)$$

式中 α_i,a,b 是待定常数,$\alpha_i\neq0$,n 可以根据其次平衡法确定.

第 4 步　将方程(4)根据不同条件求解,代入式(3),合并$\left(\frac{g'}{g^2}\right)$的同类项.令各项系数为0,得出并求解关于 α_i,a,b 的方程组.

第 5 步　把第 4 步得出的解代入式(3),可得非线性方程的精确行波解.此步可通过相关数学软件(如 Mathematica 或 Matlab)完成.

2　(g'/g^2)方程的求解过程

将方程(4)变形,得到

$$g''g^2-2gg'^2=ag^4+bg'^2.$$

取 $g=1/y$,于是上式可以写为

$$y''+by'^2+a=0.$$

当 $ab>0$ 时,

$$y(\xi)=\frac{1}{2b}\ln\left[\frac{b}{a}(A\sin(\sqrt{ab}\xi)-B\cos(\sqrt{ab}\xi))^2\right],$$

当 $ab<0$ 时,

$$y(\xi)=-\frac{1}{2b}\left(2\sqrt{|ab|}\xi-\ln\left[\frac{b}{4a}(Ae^{2\xi\sqrt{|ab|}}-B)^2\right]\right).$$

如果 $a=0,b\neq0$,得到 $y(\xi)=\frac{1}{b}\ln(A\xi b+Bb)$.

于是可得方程(4)的通解:

(1)当 $ab>0$ 时,

$$g(\xi)=\frac{2b}{\ln\left[\frac{b}{a}(E\sin(\sqrt{ab}\xi)-D\cos(\sqrt{ab}\xi))^2\right]},$$

$$\frac{g'}{g^2}=\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{E\cos(\sqrt{ab}\xi)+D\sin(\sqrt{ab}\xi)}{E\sin(\sqrt{ab}\xi)-D\cos(\sqrt{ab}\xi)}.$$

(2)当 $ab<0$ 时,

$$g(\xi)=-\frac{2b}{2\sqrt{|ab|}\xi-\ln\left[\frac{b}{4a}(Ee^{2\xi\sqrt{|ab|}}-D)^2\right]},$$

$$\frac{g'}{g^2}=\frac{1}{2b}\left(2\sqrt{|ab|}-\frac{4\sqrt{|ab|}De^{2\sqrt{|ab|}\xi}}{Ee^{2\sqrt{|ab|}\xi}-D}\right).$$

上式也可以改写为

$$\frac{g'}{g^2}=\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|}\left(\frac{E\sinh(\sqrt{|ab|}\xi)+D\cosh(\sqrt{|ab|}\xi)}{E\cosh(\sqrt{|ab|}\xi)+D\sinh(\sqrt{|ab|}\xi)}\right).$$

(3)如果 $a=0,b\neq0$,则

$$g(\xi)=\frac{b}{\ln(E\xi b+Db)},\ \frac{g'}{g^2}=-\frac{E}{E\xi b+Db}.$$

3　KdV 方程的精确行波解

KdV 方程为

$$u_t+uu_x+\beta u_{xxx}=0 \quad (5)$$

是非线性物理问题中的重要方程,主要用于研究浅水波问题和离子声波问题,并受到学界关注[7-8].对式(5)作行波变换 $u=u(\xi),\xi=x-Vt$,得到

$$-Vu'+uu'+\beta u'''=0. \quad (6)$$

上式对 ξ 积分,并取积分常数为 C,有

$$C-Vu+\frac{1}{2}u^2+\beta u''=0. \quad (7)$$

根据齐次平衡法,式(3)中 $n=2(n+3=2n+1)$.因此 KdV 方程的解可以写为

$$u(\xi)=\alpha_2\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2+\alpha_1\left(\frac{g'}{g^2}\right)+\alpha_0. \quad (8)$$

利用式(3)和方程(4),可得

$$u'=2\alpha_2\left(\frac{g'}{g^2}\right)\left[a+b\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2\right]+\alpha_1\left[a+b\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2\right],$$

$$u''=6\alpha_2b^2\left(\frac{g'}{g}\right)^4+2\alpha_1b^2\left(\frac{g'}{g^2}\right)^3+8\alpha_2ab\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2+2\alpha_1ab\left(\frac{g'}{g^2}\right)+2\alpha_2a^2,$$

$$u^2=\alpha_2^2\left(\frac{g'}{g^2}\right)^4+2\alpha_2\alpha_1\left(\frac{g'}{g^2}\right)^3+(\alpha_1^2+2\alpha_2\alpha_0)\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2+2\alpha_1\alpha_0\left(\frac{g'}{g^2}\right)+\alpha_0^2. \quad (9)$$

把式(9)中的 3 个表达式代入式(8),可得$\left(\frac{g'}{g^2}\right)$多项式.令各次幂前的系数为0,可得到以下方程组:

0 次项:$C-V\alpha_0+\frac{1}{2}\alpha_0^2+2\beta\alpha_2a^2=0$,

1 次项:$-V\alpha_1+\alpha_1\alpha_0+2\alpha_1ab\beta=0$,

2 次项:$-V\alpha_2+\frac{1}{2}(\alpha_1^2+2\alpha_2\alpha_0)+8\alpha_2ab\beta=0$,

3 次项：$\alpha_2\alpha_1+\beta\alpha_1 b^2=0$，

4 次项：$\frac{1}{2}\alpha_2^2+6\alpha_2 b^2\beta=0.$

求解以上方程组，可以得到

$$\alpha_2=-12b^2\beta,\alpha_1=0,V=\alpha_0+8ab\beta,\quad C=\alpha_0(\alpha_0+8ab\beta)-\frac{1}{2}\alpha_0^2+24b^2\beta^2a^2. \tag{10}$$

利用式(10)、(8)可以写为

$$u(\xi)=-12b^2\beta\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2+\alpha_0. \tag{11}$$

把式(8)的通解代入式(11)，可得到 KdV 方程的精确通解.

(1)当 $ab<0$ 时，得到双曲函数通解

$$u(\xi)=-12ab\beta\left[\frac{E\sinh(\sqrt{|ab|}\xi)+D\cosh(\sqrt{|ab|}\xi)}{E\cosh(\sqrt{|ab|}\xi)+D\sinh(\sqrt{|ab|}\xi)}\right]^2+\alpha_0, \tag{12}$$

其中 E,D 是任意常数，$\xi=x-(\alpha_0+8ab\beta)t$.

取 $\sinh\lambda=\frac{D}{\sqrt{E^2-D^2}}$，$\cosh\lambda=\frac{E}{\sqrt{E^2-D^2}}$，根据双曲函数的和差公式，式(12)则变为双曲函数解

$$u(\xi)=-12ab\beta\tanh^2(\sqrt{ab}\xi+\lambda)+\alpha_0,\quad \xi_0=\cot^{-1}\left(\frac{D}{E}\right), \tag{13}$$

即 KdV 方程的孤立波解.

(2)当 $ab>0$ 时，

$$u(\xi)=-12ab\beta\left[\frac{E\cos(\sqrt{ab}\xi)+D\sin(\sqrt{ab}\xi)}{E\sin(\sqrt{ab}\xi)-D\cos(\sqrt{ab}\xi)}\right]^2+\alpha_0, \tag{14}$$

其中 E,D 是任意常数，$\xi=x-(\alpha_0+8ab\beta)t$.

取 $\sin\lambda=\frac{E}{\sqrt{E^2+D^2}}$，$\cos\lambda=\frac{D}{\sqrt{E^2+D^2}}$，利用三角函数的和差公式，式(13)可写为

$$u(\xi)=-12ab\beta\tan^2(\sqrt{ab}\xi+\lambda)+\alpha_0, \tag{15}$$

即 KdV 方程的三角函数解，反之亦然.

(3)当 $a=0,b\neq0$ 时，

$$u(\xi)=-12ab\beta\left[\frac{E}{b(E\xi+D)}\right]^2+\alpha_0, \tag{16}$$

其中 E,D 是任意常数，$\xi=x-(\alpha_0+8ab\beta)t$.

4 mKdV 方程的精确通解

mKdV 的表达式为

$$u_t-u^2u_x+\beta u_{xxx}=0\ (\beta>0), \tag{17}$$

作行波变换 $u=u(\xi)$，$\xi=x-Vt$，式(17)可得

$$-Vu'-u^2u'+\beta u'''=0. \tag{18}$$

上式对 ξ 积分，并取积分常数为 C，得到

$$C-Vu-\frac{1}{3}u^3+\beta u''=0. \tag{19}$$

根据齐次平衡法，在式(3)中，$n=1(3n+1=n+3)$. 则式(19)存在以下解

$$u(\xi)=\alpha_1\left(\frac{g'}{g^2}\right)+\alpha_0\ (\alpha_1\neq0). \tag{20}$$

利用式(3)，可得

$$u''(\xi)=2\alpha_1b^2\left(\frac{g'}{g^2}\right)^3+2a\alpha_1b\left(\frac{g'}{g^2}\right), \tag{21}$$

$$u^3(\xi)=\alpha_1^3\left(\frac{g'}{g^2}\right)^3+3\alpha_1^2\alpha_0\left(\frac{g'}{g^2}\right)^2+3\alpha_1\alpha_0^2\left(\frac{g'}{g^2}\right)+\alpha_0^3. \tag{22}$$

把式(21)、(22)代入式(20)得到：

0 次项：$C-V\alpha_0-\frac{1}{3}\alpha_0^3=0$；

1 次项：$-V\alpha_1-\alpha_1\alpha_0^2+2a\beta\alpha_1 b=0$；

2 次项：$-\alpha_1^2\alpha_0=0$；

3 次项：$2\alpha_1b^2\beta-\frac{1}{3}\alpha_1^3=0.$

由以上方程有

$$\alpha_1=\pm b\sqrt{6\beta}\ (\alpha_0=0,V=2ab\beta,C=0). \tag{23}$$

(1)当 $ab<0$ 时，双曲函数通解为

$$u(\xi)=\pm\sqrt{6|ab|\beta}\frac{E\sinh(\sqrt{|ab|}\xi)+D\cosh(\sqrt{|ab|}\xi)}{E\cosh(\sqrt{|ab|}\xi)+D\sinh(\sqrt{|ab|}\xi)}. \tag{24}$$

取 $\sinh\lambda=\frac{D}{\sqrt{E^2-D^2}}$，$\cosh\lambda=\frac{E}{\sqrt{E^2-D^2}}$，根据双曲函数的和差公式，上式化为

$$u(\xi)=\pm\sqrt{6|ab|\beta}\tanh(\sqrt{ab}\xi+\lambda), \tag{25}$$

即 mKdV 方程的孤立波解.

(2)当 $ab>0$ 时，三角函数通解为

$$u(\xi)=\pm\sqrt{6ab\beta}\frac{E\cos(\sqrt{ab}\xi)+D\sin(\sqrt{ab}\xi)}{E\sin(\sqrt{ab}\xi)-D\cos(\sqrt{ab}\xi)}. \tag{26}$$

取 $\sin\lambda=\frac{E}{\sqrt{E^2+D^2}}$，$\cos\lambda=\frac{D}{\sqrt{E^2+D^2}}$利用三角函数的和差公式，上述方程的解可以写为

$$u(\xi)=\pm\sqrt{6ab\beta}\tan(\sqrt{ab}\xi+\lambda), \tag{27}$$

即 mKdV 方程的三角函数解.

(3)当 $a=0,b\neq0$ 时，有

$$u(\xi)=\pm\sqrt{6\beta}\frac{E}{E\xi+D}. \tag{28}$$

此处 E、D 可取任意常数.

5 (g'/g^2)展开法与其他方法求解行波解的比较

一般来说，求解 KdV 方程和 mKdV 方程的方法主要是利用椭圆函数的性质. 然而，椭圆函数法求解上述 2 个方程时，得到的是相关的椭圆函数正弦波解或余弦波解，这介乎 2 个极限：线性解和孤立波解之间，在得到椭圆函数解之后，还需要选取适当的极限才能得到对应的孤立波解. 另外，根据相关文献[4]，(g'/g)展开法也是一个求解方程的较好方法，但是在求解过程中不具有用(g'/g^2)展开法所体现的优势.

6 结论

通常，求解 KdV 方程和 mKdV 方程的方法主要是利用椭圆函数法. 然而，椭圆函数法求解上述 2 个方程时，得到的是相关的椭圆函数正弦波解或余弦波解，这介乎 2 个极限：线性解和孤立波解. 在得到椭圆函数解之后，还需要选取适当的极限才可以得到对应的孤立波解. 另外，采用(g'/g)展开法求解过程比较冗长、繁琐.

本文采用(g'/g^2)展开法研究了 KdV 方程及其变形 mKdV 方程. 并且得出了这 2 个方程的精确通解：双曲函数解、三角函数解及有理函数解. 如果双曲函数中的常数做出适当改变，可得到孤立波解. 根据求解过程，相比(g'/g)展开等方法，采用(g'/g^2)展开法研究非线性方程（KdV 方程和 mKdV 方程），具有计算简便、直接等优点. 至于(g'/g^2)展开法在求解其他非线性方程的应用有待研究与讨论.

参考文献：

[1] Hirota R. Exact solution of the Kortewegde Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. Physical Review Letters, 1971, 27: 1192 – 1194.

[2] Liu S K, Liu S D, Fu Z T, et al. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations[J]. Physics Letters A, 2001, 289: 69 – 74.

[3] Wang M L. Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations[J]. Physics Letters A, 1995, 199: 169 – 172.

[4] Wang M L, Li X Z, Zhang J L. The (g'/g)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Physics Letters A, 2008, 372: 417 – 423.

[5] Li W A, Chen H, Zhang G C. The (ω/g)-expansion method and its application to Vakhnenko equation[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(2): 400 – 404.

[6] 陈继培，陈浩. (g'/g^2)展开法及其在耦合非线性 Klein-Gordon 方程中的应用[J]. 华南师范大学学报：自然科学版，2012，44(2)：63 – 66.
Chen J P, Chen H. The (g'/g^2)-Expansion method and its application to coupled nonlinear Klein-Gordon Equation[J]. Journal of South China Normal University: Natural Science Edition, 2012, 44(2): 63 – 66.

[7] Feng Z S, Chen G. Solitary wave solutions of the compound Burgers Korteg-de Vries Equation[J]. Physica A, 2005, 352: 419 – 435.

[8] 蒋毅，陈渝芝，蒲志林. 1 + 1 维空间中变系数 KdV 方程组的精确解[J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2007，30(6)：670 – 673.
Jiang Y, Chen Y Z, Pu Z L. Explicit solutions to the {1 + 1}-dimensional KdV Equations with variable coefficients[J]. Journal of Sichuan Normal University: Natural Science, 2007, 30(6): 670 – 673.

【中文责编：谭春林　英文责编：肖菁】