

复合交叉圈的邻点可区别全色数

杨超, 姚兵*, 王宏宇
(西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要:为进一步探讨邻点可区别全染色猜想,首次研究一类叫做复合交叉圈的平面图.先确定了此类特殊复合交叉圈的邻点可区别全色数,继而采用边剖分的技术由此类特殊复合交叉圈得到一般复合交叉圈的邻点可区别全色数.

关键词:复合交叉圈;平面图;全染色;邻点可区别全染色

中图分类号:O157.5 文献标志码:A doi:10.6054/j.jscnun.2013.12.005

Adjacent-Vertex Distinguishing Total Chromatic Numbers of Compound Intersecting Cycles

Yang Chao, Yao Bing*, Wang Hongyu

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: In order to discuss the conjecture of adjacent vertex distinguishing total colorings further more, a type of planar graph called compound intersecting cycles is studied for the first time. Through researching, the vertex distinguishing total chromatic numbers of compound intersecting cycles are exactly evaluated here. By the technique of splitting edges, general compound intersecting cycles can be obtained from some particular compound intersecting cycles of small scales, and their vertex distinguishing total chromatic numbers are determined.

Key words: compound intersecting cycles; planar graphs; total colorings; adjacent vertex distinguishing total colorings

1 引言及概念

图的染色和标号是当今图论学科中十分活跃的分支,它们在编码理论、通讯网络、物流等方面均有应用^[1-4].图的邻点可区别全染色的概念第一次被张忠辅等^[5]提出,并提出了以下的邻点可区别全染色猜想:

猜想 1^[5] 对于阶数不小于 2 的简单连通图 G ,有 $\chi''_{as}(G) \leq \Delta(G) + 3$.

然而,诸多文献的结论表明,解决上述猜想较困难.近些年来,对此猜想的研究成果不断报道^[6-10],Wang 等^[7]对平面图验证了邻点可区别全染色猜想,取得了较好的结论.令平面图 G 的最小圈长为 $g(G)$,他们证明了:当 $g(G) \geq 6$ 和 $\Delta(G) = 4$ 时, $\chi''_{as}(G) \leq 6$;当 $g(G) \geq 8$ 和 $\Delta(G) = 3$ 时, $\chi''_{as}(G) \leq 5$.然而,对于最小圈长 $g(G) \leq 5$ 的平面

图的邻点可区别全染色还有待研究,没有一般的方法来确定他们的邻点可区别全色数.

本文研究一类复合交叉圈,验证了邻点可区别全染色猜想,得到了它在最小圈长不超过 5 时的邻点可区别全色数,从而促进了对最小圈长不超过 5 的平面图的邻点可区别全染色问题的研究.文中论及的图均为有限、无向简单图,且采用标准的图论术语和符号,可参见文献[11].

定义 1 设 f 是至少有 3 个顶点的简单图 G 的一个正常 k -全染色, $C = [1, k]$ 叫做 G 的色集. $C(u, f)$ 表示 G 的顶点 u 及其关联边在 f 下的色集合.对每一条边 $uv \in E(G)$,如果 $C(u, f) \neq C(v, f)$,则称 f 是 G 的一个邻点可区别 k -全染色.以下记 $f(V(G) \cup E(G)) = \{f(x) \mid x \in V(G) \cup E(G)\}$.图 G 的全体邻点可区别 k -全染色中最小的颜色数叫做 G 的邻点可区别全色数,记为 $\chi''_{as}(G)$.

引理 1^[5] 设 P_n 是 n 阶路.当 $n \geq 4$ 时, $\chi''_{as}(P_n)$

$=4$; 当 $n=2,3$ 时, $\chi''_{as}(P_n) = 3$.

引理 2^[5] 设 C_n 是 n 阶圈($n \geq 4$), 则 $\chi''_{as}(C_n) = 4$.

引理 3^[5] 如果 G 有相邻的 Δ -顶点, 则 $\chi''_{as}(G) \geq \Delta(G) + 2$.

定义 2 一个双圈图 $G = G[C_m, C_n]$ 满足:

(1) G 是平面图, 且包含一个 m 个顶点的圈 $C_m = x_1x_2 \cdots x_mx_1$ 和一个 n 个顶点的圈 $C_n = y_1y_2 \cdots y_ny_1$;

(2) $E(G) = E(C_m) \cup E(C_n)$, 以及 $|V(G)| \leq m + n - 2$;

(3) 当顶点 $u \in V(C_m) \cap V(C_n)$ 时, 它的度数 $\deg_G(u) = 4$, 否则 $\deg_G(u) = 2$.

显然, 双圈图 $G = G[C_m, C_n]$ 的最大度 $\Delta(G) = 4$, 最小度 $\delta(G) = 2$, 且没有 1 度和 3 度顶点. 相对于圈 C_n , 如果圈 C_m 的一条路 $P(x_i, x_j) = x_ix_{i+1} \cdots x_j$ 满足 $V(C_n) \cap V(P(x_i, x_j)) = \{x_i, x_j\}$, 称路 $P(x_i, x_j)$

为双圈图 G 的一个基于圈 C_n 的耳朵, 简称为耳朵, C_n 叫做基圈. 如果路 $P(x_i, x_j)$ 位于基圈 C_n 内(外), 就把路 $P(x_i, x_j)$ 叫做内(外)耳. 注意到, 双圈图 $G = G[C_m, C_n]$ 的 2 个圈相对于耳朵概念是对称的, 为可区分, 以下不把圈 C_n 的路叫做耳朵. 容易观察到: 双圈图 $G = G[C_m, C_n]$ 至少有 2 个耳朵, G 的圈 C_m 是耳朵的并, 它的内耳数目等于外耳数目. 设基圈 C_n 的一条路 $Q = y_sy_{s+1} \cdots y_iy_{i+1} \cdots y_ky_{k+1} \cdots y_l$ 上连接了 G 的 2 个内(外)耳 $P(y_s, y_l) \subset C_m$ 和 $P(y_i, y_k) \subset C_m$. 如果在路 Q 的子路 $y_{s+1} \cdots y_{l-1}$, $y_{i+1} \cdots y_{k-1}$ 和 $y_{k+1} \cdots y_{l-1}$ 上, 再没有 G 的其他耳朵, 把路 $P(y_s, y_l)$ 和 $P(y_i, y_k)$ 叫做 G 的双(外)耳, 不是双耳的耳朵叫做单耳. 按耳朵分类, 可将双圈图分为 3 类, 如图 1 所示.

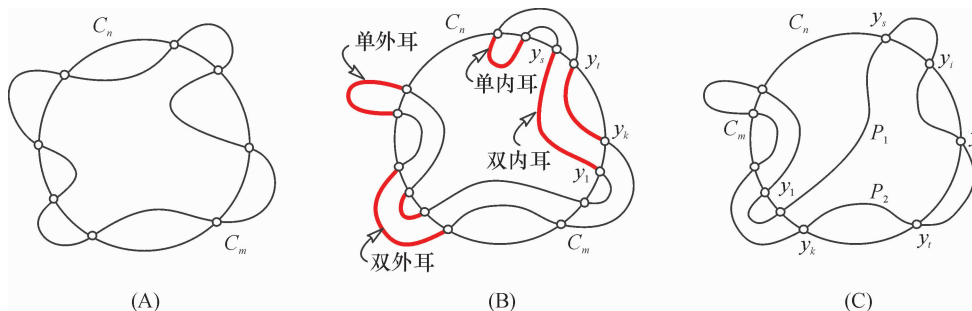


图 1 双圈图的类型

Figure 1 The type of intersecting cycle

定义 3 一个交叉圈是双圈图 $G = G[C_m, C_n]$, 满足:(1) 当 $|V(G)| = m + n - 2$ 时, G 仅含 1 个单内耳和 1 个单外耳;(2) 当 $|V(G)| < m + n - 2$ 时, G 恰含 2 个单耳, 其余的均为双耳.

推广定义 3 如下:

定义 4 一个交叉 k -圈 $H_k = H_k[C_m, C_{n_i}]$ ($i \in [1, k], k \geq 2$) 满足:

(1) H_k 是连通平面图, 且含圈 $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_k}$ 和 C_m ; $\Delta(H_k) = 4$;

(2) 对 $i \in [1, k-1]$, 圈 C_{n_i} 在圈 $C_{n_{i+1}}$ 内, 且 $V(C_{n_i}) \cap V(C_{n_j}) = \emptyset, i \neq j$.

(3) $E(H_k) = (\cup_{i=1}^k E(C_{n_i})) \cup E(C_m)$, $|V(H_k)| \leq m - 2k + \sum_{i=1}^k n_i$; 当顶点 $u \in V(C_m) \cap V(C_{n_i})$ 时, $\deg_G(u) = 4$, 否则 $\deg_G(u) = 2$;

(4) 对每个圈 C_{n_j} , 在 H_k 中删去边子集 $\cup_{i \neq j} E(C_{n_i})$ 中的所有边以及删边后产生的孤立顶点, 余下的图恰是一个交叉圈 $G = G[C_m, C_{n_j}]$.

符号 $[s, t]$ 表示非负整数集 $\{s, s+1, s+2, \dots, t\}$, 其中 s 和 t 均为整数, 且满足 $0 \leq s < t$. $[k, \ell]^e$ 表

示偶数集 $\{k, k+2, k+4, \dots, \ell\}$, 其中 k 和 ℓ 为偶数, 且满足 $0 \leq k < \ell$; $[s, t]^o$ 表示奇数集 $\{s, s+2, s+4, \dots, t\}$, 其中 s 和 t 是满足 $1 \leq s < t$ 的奇数.

2 主要结果及其证明

图中达到最大度的顶点叫做 Δ -顶点.

引理 4 设 uw 是交叉圈 $G = G[C_m, C_n]$ 中的任意一条边, 用一条路 uvw 来替代边 $uw, w \notin V(G)$, 所得到的新图记为 H . 如果 G 中不含相邻的 Δ -顶点, 则 $\chi''_{as}(H) \leq \chi''_{as}(G)$.

证明 设 f 为交叉圈 $G = G[C_m, C_n]$ 的一个邻点可区别全染色, 且 $\min f(V(G) \cup E(G)) = \chi''_{as}(G) = |C|$. 令 $f(uw) = \alpha$. 下面分 2 种情形证明.

情形 1. G 中有路 xuw , 且 $\deg_G(x) = \deg_G(v) = 4$ 以及 $\deg_G(u) = 2$. 用一条路 uvw 来替代边 uw 得到新交叉圈 $H, w \notin V(G)$.

在 H 中, 仅需考虑对顶点 w 以及它的 2 条关联边 uw 和 wv 进行染色, 使得新图 H 满足 $\chi''_{as}(H) \leq \chi''_{as}(G)$. 定义 H 的一个正常全染色 g 如下: $g(uw) =$

$a_1, a_1 \in \overline{C}(u, f); g(w) = \alpha; g(w) \in C \setminus \{\alpha, a_1, g(u), g(v)\}; g(t) = f(t), t \in (S_1 \setminus \{uv\}) \subseteq (S_2 \setminus \{uw, w, wv\})$, 其中 $S_1 = V(G) \cup E(G), S_2 = V(H) \cup E(H)$.

对如此构造的 $g, C(t_0, g) = C(t_0, f), t_0 \in V(H) \setminus \{u, w\}$, 故它们是邻点可区别的. $C(u, g) = \{\alpha, a_1, g(u), g(ux)\}, C(w, g) = \{\alpha, a_1, g(w)\}$, 因为 $\alpha \in C(w, g)$, 但 $\alpha \notin C(u, g)$, 所以 $C(u, g) \neq C(w, g)$. 又因为 $\deg_H(x) = \deg_H(v) = 4, \deg_H(u) = \deg_H(w) = 2$, 所以, $C(w, g) \neq C(v, g), C(x, g) \neq C(u, g)$. 从而可得 g 是 H 的一个邻点可区别全染色, 且有 $\chi''_{as}(H) \leq \chi''_{as}(G)$.

情形 2. G 中有路 $xwvy$, 且 $\deg_G(x) = \deg_G(y) = 4$ 以及 $\deg_G(u) = \deg_G(v) = 2$. 用一条路 uwv 替代边 uw 得到新交叉圈 $H, w \notin V(G)$.

在 H 中, 仅需考虑对顶点 w 以及它的 2 条关联边 uw 和 wv 进行染色, 使得新图 H 满足 $\chi''_{as}(H) \leq \chi''_{as}(G)$. 定义 H 的一个正常全染色 h 如下: 令 $h(uw) = b_1, b_1 \in \overline{C}(v, f); h(w) = \alpha; h(uw) \in C \setminus \{\alpha, b_1, h(u), h(ux)\}; h(t) = f(t), t \in (S_1 \setminus \{uv\}) \subseteq (S_2 \setminus \{uw, w, wv\})$, 其中 $S_1 = V(G) \cup E(G), S_2 = V(H) \cup E(H)$.

对如此构造的 $h, C(t_0, h) = C(t_0, f), t_0 \in V(H) \setminus \{w, v\}$, 故它们是邻点可区别的. $C(u, h) = \{h(ux), h(u), h(uw)\}, C(w, h) = \{\alpha, b_1, h(uw)\}, C(v, h) = \{b_1, h(v), h(vy)\}$, 因为 $\alpha \in C(w, h)$, 但 $\alpha \notin C(u, h)$, 所以 $C(u, h) \neq C(w, h)$. 因为 $\alpha \in C(w, h)$, 但 $\alpha \notin C(v, h)$, 所以 $C(w, h) \neq C(v, h)$. 又因为 $\deg_H(x) = \deg_H(y) = 4, \deg_H(u) = \deg_H(v) = 2$, 所以 $C(x, h) \neq C(u, h), C(y, h) \neq C(v, h)$. 因此得到 h 是 H 的一个邻点可区别全染色, 且有 $\chi''_{as}(H) \leq \chi''_{as}(G)$.

综合以上讨论, 引理得证. \square

运用相似于引理 4 的证明方法, 可证得

引理 5 设 uv 是交叉 k -圈 H_k 中的任意一条边, 用一条路 uwv 来替代边 $uv, w \notin V(H_k)$, 所得到的新图记为 H' . 如果 H_k 不含相邻的 Δ -顶点, 则 $\chi''_{as}(H') \leq \chi''_{as}(H_k)$.

引理 6 设交叉圈 $G = G[C_m, C_n]$ 不含相邻的 Δ -顶点, 且每一个 2 度顶点都相邻 2 个 Δ -顶点, 则 $\chi''_{as}(G) = 5$.

证明 运用数学归纳法.

情形 1. 圈 C_m 与基圈 C_n 相交 1 次. 为便于区别, 用 C_m^1 表示圈 C_m, C_n^1 表示圈 C_n , 不妨设 $C_m^1 = x_1x_2x_3x_4x_1, C_n^1 = y_1y_2y_3y_4y_1$, 其中 $\deg_G(x_i) = \deg_G(y_i) = 4, i \in [1, 4]^0; \deg_G(x_i) = \deg_G(y_i) = 2, i \in [1, 4]^e$.

见图 2A. 因为 $\Delta(G) = 4$, 且 G 中没有相邻的 Δ -顶点, 所以 $\chi''_{as}(G) \geq \Delta(G) + 1 = 5$.

下面证明用 5 种颜色就可以对 G 进行邻点可区别全染色. 定义交叉圈 G 的一个正常全染色 h 如下: $h(x_1) = h(y_1) = 1, h(x_3) = h(y_3) = 2, h(y_2) = h(y_4) = 4, h(x_2) = h(x_4) = 3, h(y_1y_2) = h(y_3y_4) = 3, h(y_2y_3) = 1, h(y_1y_4) = 2, h(x_1x_2) = h(x_3x_4) = 4, h(x_2x_3) = h(x_1x_4) = 5$.

对如此构造的 h , 有 $\overline{C}(x_1, h) = \overline{C}(x_3, h) = \overline{C}(y_1, h) = \overline{C}(y_3, h) = \emptyset, \overline{C}(x_2, h) = \overline{C}(x_4, h) = \{1, 2\}, \overline{C}(y_2, h) = \{2, 5\}, \overline{C}(y_4, h) = \{1, 5\}$. 显然, $C(y_i, h) \neq C(y_{i+1}, h), i \in [1, 3]; C(x_i, h) \neq C(x_{i+1}, h), i \in [1, 3]; C(y_1, h) \neq C(y_4, h); C(x_1, h) \neq C(x_4, h)$. 说明 h 是 G 的一个邻点可区别全染色, 因此, $\chi''_{as}(G) = 5$.

情形 2. 假设圈 C_m 与基圈 C_n 相交 β 次, 则 $\chi''_{as}(G) = 5$. 为便于区别, 用 C_m^2 表示圈 C_m, C_n^2 表示圈 C_n , 不妨设 $C_m^2 = x_1x_2 \cdots x_{4\beta}x_1, C_n^2 = y_1y_2 \cdots y_{4\beta}y_1$. 见图 2B. 由归纳假设, G 有一个邻点可区别全染色 ϕ , 使得 $\min \phi(V(G) \cup E(G)) = \chi''_{as}(G) = 5$. 不失一般性, 给出 G 的一个邻点可区别全染色 ϕ 如下: $\phi(x_i) = \phi(y_j) = 1, i, j \in [1, 4\beta]$ 且 $i, j \equiv 1 \pmod{4}; \phi(x_i) = \phi(y_j) = 2, i, j \in [1, 4\beta]$ 且 $i, j \equiv 3 \pmod{4}; \phi(y_j) = 4, j \in [1, 4\beta]^e; \phi(x_i) = 3, i \in [1, 4\beta]^e; \phi(y_jy_{j+1}) = 3, j \in [1, 4\beta]^0; \phi(y_jy_{j+1}) = 1, j \in [1, 4\beta]$ 且 $j \equiv 2 \pmod{4}; \phi(y_1y_{4\beta}) = \phi(y_jy_{j+1}) = 2, j \in [1, 4\beta]$ 且 $j \equiv 0 \pmod{4}; \phi(x_ix_{i+1}) = 4, i \in [1, 4\beta]^0; \phi(x_ix_{i+1}) = \phi(x_1x_{4\beta}) = 5, i \in [1, 4\beta]^e$.

下面考虑圈 C_m^2 与基圈 C_n^2 第 $\beta+1$ 次相交的情形. 不妨记此时产生的新圈为 C_m^3, C_n^3 , 其中, $C_m^3 = x_1x_2 \cdots x_{4\beta}x_{4\beta+1}x_{4\beta+2}x_{4\beta+3}x_{4\beta+4}x_1, C_n^3 = y_1y_2 \cdots y_{4\beta}y_{4\beta+1}y_{4\beta+2}y_{4\beta+3}y_{4\beta+4}y_1$. 如图 2C 所示. 定义圈 C_m^2 与基圈 C_n^2 第 $\beta+1$ 次相交的一个正常全染色 φ 如下: $\varphi(x_i) = \varphi(y_j) = 1, i, j \in [4\beta+1, 4\beta+4]$ 且 $i, j \equiv 1 \pmod{4}; \varphi(x_i) = \varphi(y_j) = 2, i, j \in [4\beta+1, 4\beta+4]$ 且 $i, j \equiv 3 \pmod{4}; \varphi(y_j) = 4, i \in [4\beta+1, 4\beta+4]^e; \varphi(x_i) = 3, i \in [4\beta+1, 4\beta+4]^e; \varphi(y_jy_{j+1}) = 3, j \in [4\beta+1, 4\beta+4]^0; \varphi(y_jy_{j+1}) = 1, j \in [4\beta+1, 4\beta+4]^0$ 且 $i \equiv 2 \pmod{4}; \varphi(y_1y_{4\beta+4}) = \varphi(y_jy_{j+1}) = 2, j \in [4\beta+1, 4\beta+4]^0$ 且 $j \equiv 0 \pmod{4}; \varphi(x_ix_{i+1}) = 4, i \in [4\beta+1, 4\beta+4]^0; \varphi(x_ix_{i+1}) = \varphi(x_1x_{4\beta+4}) = 5, i \in [4\beta+1, 4\beta+4]^e$, 剩余顶点和边的染色保持它们在 ϕ 下的染色不变.

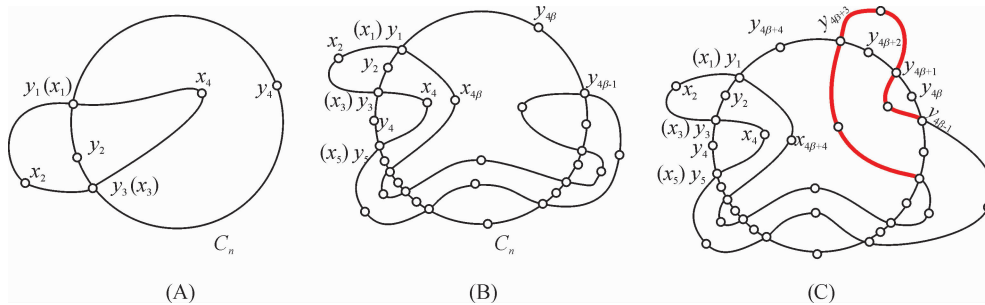


图 2 引理 6 的相关图

Figure 2 The graphs of Lemma 6

对如此构造的 φ , 有 $\bar{C}(x_i, \varphi) = \bar{C}(y_j, \varphi) = \emptyset, i, j \in [1, 4\beta + 4]^0$; $\bar{C}(x_i, \varphi) = \{1, 2\}, i \in [1, 4\beta + 4]^e$; $\bar{C}(y_j, \varphi) = \{2, 5\}, j \in [1, 4\beta + 4]$ 且 $j \equiv 2 \pmod{4}$; $\bar{C}(y_j, \varphi) = \{1, 5\}, j \in [1, 4\beta + 4]$ 且 $j \equiv 0 \pmod{4}$. 从而得到 $C(y_i, \varphi) \neq C(y_{i+1}, \varphi), i \in [1, 4\beta + 3]$; $C(y_{4\beta+4}, \varphi) \neq C(y_1, \varphi)$; $C(x_i, \varphi) \neq C(x_{i+1}, \varphi), i \in [1, 4\beta + 3]$; $C(x_{4\beta+4}, \varphi) \neq C(x_1, \varphi)$. 所以 φ 是 G 的一个邻点可区别全染色, 且有 $\chi''_{as}(G) = 5$.

综合以上讨论, 引理得证. \square

定理 1 如果一个交叉圈 $G = G[C_m, C_n]$ 不含相邻的 Δ -顶点, 则 $\chi''_{as}(G) = 5$.

证明 情形 1. 交叉圈 $G = G[C_m, C_n]$ 不含相邻的 Δ -顶点, 且每一个 2 度顶点都相邻 2 个 Δ -顶点, 由引理 6, 得 $\chi''_{as}(G) = 5$.

情形 2. 交叉圈 G 不含相邻的 Δ -顶点 (情形 1 除外), $uw_1w_2 \cdots w_k v$ 为 G 中任意一条路, 其中 $\deg_G(u) \neq \deg_G(v), \deg_G(w_i) = 2, i \in [1, k]$, 设在情形 1 中有 $uw \in E(G)$, 情形 2 中的路 $uw_1w_2 \cdots w_k v$ 可以由情形 1 中 G 的一条边 uw 运用引理 4 的方法构造之. 由引理 4, $\chi''_{as}(H) \leq \chi''_{as}(G)$. 再由情形 1, 知 $\chi''_{as}(G) = 5$. 所以, $\chi''_{as}(H) \leq 5$. 注意到, $\Delta(G) = \Delta(H) = 4$ 导致 $\chi''_{as}(G) \geq 5$. 所以, $\chi''_{as}(G) = \chi''_{as}(H) = 5$.

综合以上讨论, 定理得证. \square

引理 7 设交叉 k -圈 $H_k (k \geq 1)$ 不含相邻的 Δ -顶点, 且每一个 2 度顶点都相邻 2 个 Δ -顶点, 则 $\chi''_{as}(H_k) = 5$.

证明 运用数学归纳法.

情形 1. 圈 C_m 与圈 $C_{n_i} (i \in [1, k])$ 相交 1 次. 为便于区别, 用 C_m^4 表示圈 $C_m, C_{n_i}^4$ 表示圈 C_{n_i} , 不妨设 $C_m^4 = x_1x_2 \cdots x_{4k}x_1, C_{n_i}^4 = y_{i,1}y_{i,2} \cdots y_{i,4}y_{i,1}, i \in [1, k]$. 如图 3A 所示. 因为 $\Delta(H_k) = 4$, 且 H_k 中没有相邻的 Δ -顶点. 所以 $\chi''_{as}(H_k) \geq \Delta(H_k) + 1 = 5$.

下面证明用 5 种颜色可对 H_k 进行邻点可区别全染色. 设 ψ 为 H_k 的一个正常全染色. 不失一般性, 设 $\psi(y_{i,1}) = 1, i \in [1, k]; \psi(y_{i,3}) = 2, i \in [1, k]; \psi(y_{i,2}) = f(y_{i,4}) = 4, i \in [1, k]; \psi(y_{i,j}y_{i,j+1}) = 3, i \in$

$[1, k], j \in [1, 4]^0; \psi(y_{i,1}y_{i,4}) = 2, i \in [1, k]; \psi(y_{i,2}y_{i,3}) = 1, i \in [1, k]; \psi(x_i) = 1, i \in [1, 2k]^0; \psi(x_i) = 2, i \in [2k, 4k]^0; \psi(x_i) = 3, i \in [1, 4k]^e; \psi(x_ix_{i+1}) = 4, i \in [1, 4k]^0; \psi(x_ix_{i+1}) = \psi(x_ix_{4k}) = 5, i \in [1, 4k]^e$.

对如此构造的 ψ , 有 $\bar{C}(x_i, \psi) = \bar{C}(y_{i,j}, \psi) = \emptyset, i \in [1, 4k]^0, j \in [1, 4]^0; \bar{C}(x_i, \psi) = \{1, 2\}, i \in [1, 4k]^e; \bar{C}(y_{i,2}, \psi) = \{2, 5\}, i \in [1, k], \bar{C}(y_{i,4}, \psi) = \{1, 5\}, i \in [1, k]$, 于是 $C(y_{i,j}, \psi) \neq C(y_{i,j+1}, \psi), i \in [1, k], j \in [1, 3]; C(y_{i,4}, \psi) \neq C(y_{i,1}, \psi), i \in [1, k]; C(x_h, \psi) \neq C(x_{h+1}, \psi), h \in [1, 4k - 1]; C(x_{4k}, \psi) \neq C(x_1, \psi)$. 从而证得 ψ 是 H_k 的一个邻点可区别全染色, 且 $\chi''_{as}(H_k) = 5$.

情形 2. 假设当 C_m 与圈 $C_{n_i} (i \in [1, k])$ 相交 β 次时, $\chi''_{as}(H_k) = 5$. 为便于区别, 用 C_m^5 表示圈 $C_m, C_{n_i}^5$ 表示圈 C_{n_i} , 不妨设 $C_m^5 = x_1x_2 \cdots x_{4k\beta}x_1, C_{n_i}^5 = y_{i,1}y_{i,2} \cdots y_{i,4\beta}y_{i,1}, i \in [1, k]$.

由归纳假设, H_k 有一个邻点可区别全染色 ζ , 使得 $\min \zeta(V(H_k) \cup E(H_k)) = \chi''_{as}(H_k) = 5$. 不失一般性, 给出 H_k 的一个邻点可区别全染色 ζ 如下: $\zeta(y_{i,j}) = 1, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta]$ 且 $j \equiv 1 \pmod{4}$; $\zeta(y_{i,3}) = 2, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta]$ 且 $j \equiv 3 \pmod{4}$; $\zeta(y_{i,j}) = 4, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta]^e; \zeta(y_{i,j}y_{i,j+1}) = 3, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta]^0; \zeta(y_{i,1}y_{i,4\beta}) = \zeta(y_{i,j}y_{i,j+1}) = 2, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta]$ 且 $j \equiv 0 \pmod{4}; \zeta(y_{i,j}y_{i,j+1}) = 1, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta]$ 且 $j \equiv 2 \pmod{4}; \zeta(x_i) = 1, i \in [1, 2k\beta]^0; \zeta(x_i) = 2, i \in [2k\beta, 4k\beta]^0; \zeta(x_i) = 3, i \in [1, 4k\beta]^e; \zeta(x_ix_{i+1}) = 4, i \in [1, 4k\beta]^0; \zeta(x_ix_{i+1}) = \zeta(x_ix_{4k\beta}) = 5, i \in [1, 4k\beta]^e$.

下面考虑圈 C_m^5 与圈 $C_{n_i}^5 (i \in [1, k])$ 第 $\beta + 1$ 次相交的情形, 见图 3B. 不妨记此时得到的新图为 $C_m^6, C_{n_i}^6$, 其中, $C_m^6 = x_1x_2 \cdots x_{4k\beta}x_{4k\beta+1}x_{4k\beta+2} \cdots x_{4k\beta+4k}x_1, C_{n_i}^6 = y_{i,1}y_{i,2} \cdots y_{i,4\beta}y_{i,4\beta+1}y_{i,4\beta+2}y_{i,4\beta+3}y_{i,4\beta+4}y_{i,1}, i \in [1, k]$. 设 ξ 为此时 H_k 的一个正常全染色, 给出 ξ 如下: $\xi(y_{i,j}) = 1, i \in [1, k], j \in [4\beta + 1, 4\beta + 4]$ 且 $j \equiv 1 \pmod{4}; \xi(y_{i,3}) = 2, i \in [1, k], j \in [4\beta + 1, 4\beta + 4]$

且 $j \equiv 3 \pmod 4$; $\xi(y_{i,j}) = 4, i \in [1, k], j \in [4\beta + 1, 4\beta + 4]^e$; $\xi(y_{i,j}y_{i,j+1}) = 3, i \in [1, k], j \in [4\beta + 1, 4\beta + 4]^o$; $\xi(y_{i,1}y_{i,4\beta+4}) = \xi(y_{i,j}y_{i,j+1}) = 2, i \in [1, k], j \in [4\beta + 1, 4\beta + 4]$ 且 $j \equiv 0 \pmod 4$; $\xi(y_{i,j}y_{i,j+1}) = 1, i \in [1, k], j \in [4\beta + 1, 4\beta + 4]$ 且 $j \equiv 2 \pmod 4$; $\xi(x_i) = 1, i \in [4k\beta + 1, 4k\beta + 2k]^o$; $\xi(x_i) = 2, i \in [4k\beta + 2k, 4k\beta + 4k]^o$; $\xi(x_i) = 3, i \in [4k\beta + 1, 4k\beta + 4k]^e$; $\xi(x_i x_{i+1}) = 4, i \in [4k\beta + 1, 4k\beta + 4k]^o$; $\xi(x_i x_{i+1}) = \xi(x_i x_{4k\beta+4k}) = 5, i \in [1, 4k\beta + 4k]^e$, 剩余其他的顶点和边的染色保持它们在 ξ 下的染色不变.

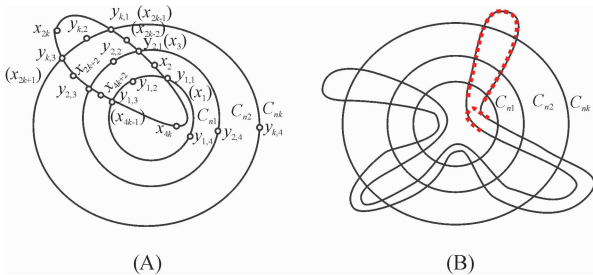


图 3 引理 7 的相关图

Figure 3 The graphs of Lemma 7

对如此构造的 ξ , 有 $\bar{C}(x_i, \xi) = \bar{C}(y_{i,j}, \xi) = \emptyset, i \in [1, 4k]^o, j \in [1, 4\beta + 4]^o$; $\bar{C}(x_i, \xi) = \{1, 2\}, i \in [1, 4k\beta + 4]^e$; $\bar{C}(y_{i,j}, \xi) = \{2, 5\}, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta + 4]$ 且 $j \equiv 2 \pmod 4$; $\bar{C}(y_{i,4}, \xi) = \{1, 5\}, i \in [1, k], j \in [1, 4\beta + 4]$ 且 $j \equiv 0 \pmod 4$. 于是得到, $C(y_{i,j}, \xi) \neq C(y_{i,j+1}, \xi), i \in [1, k], j \in [1, 4\beta + 3], C(y_{i,4\beta+4}, \xi) \neq C(y_{i,1}, \xi), i \in [1, k]; C(x_h, \xi) \neq C(x_{h+1}, \xi), h \in [1, 4k\beta + 4k - 1]; C(x_{4k\beta+4k}, \xi) \neq C(x_1, \xi)$. 从而证得 ξ 是 H_k 的一个邻点可区别全染色, 且 $\chi''_{as}(H_k) = 5$. 因此, 当圈 C_m 与圈 $C_{n_i} (i \in [1, k])$ 第 $\beta + 1$ 次相交, 总有 $\chi''_{as}(H_k) = 5$.

引理得证.

定理 2 如果一个交叉 k -圈 $H_k (k \geq 2)$ 不含相邻的 Δ -顶点, 则 $\chi''_{as}(H_k) = 5$.

证明 情形 1. 如果交叉 k -圈 H_k 不含相邻的 Δ -顶点, 且每一个 2 度顶点都相邻 2 个 Δ -顶点, 则由引理 7, $\chi''_{as}(H_k) = 5$.

情形 2. 如果交叉 k -圈 H_k 不含相邻的 Δ -顶点 (情形 1 除外), $uw_1w_2 \cdots w_kv$ 为 H_k 中任意一条路, 其中 $\deg_{H_k}(u) \neq \deg_{H_k}(v), \deg_{H_k}(w_i) = 2, i \in [1, k]$, 设在情形 1 中有 $w \in E(H_k)$, 情形 2 中的路 $uw_1w_2 \cdots w_kv$ 可以由情形 1 中 H_k 的一条边 w 采用引理 5 的方法构造出来. 由引理 5 知 $\chi''_{as}(H') \leq \chi''_{as}(H_k)$. 由情形 1 知 $\chi''_{as}(H_k) = 5$, 故 $\chi''_{as}(H') \leq 5$. 又因为 $\Delta(H_k) = \Delta(H') = 4$, 以及 $\chi''_{as}(H_k) \geq 5$, 从而得 $\chi''_{as}(H_k) = \chi''_{as}(H') = 5$. 证毕. \square

参考文献:

[1] 周向前, 姚兵, 程辉. 关于 0-可旋转树[J]. 华南师范大学学报:自然科学版, 2011(4): 54-57. Zhou X Q, Yao B, Cheng H. On 0-rotatable trees [J]. Journal of South China Normal University: Natural Science Edition, 2011(4): 54-57.

[2] 吴康, 薛展充. 关于圈图 C_n 的连 2 距 k 着色计数[J]. 华南师范大学学报:自然科学版, 2007(2): 7-10. Wu K, Xue Z C. The counting of double distanced k -coloring in cycle [J]. Journal of South China Normal University: Natural Science Edition, 2007(2): 7-10.

[3] 卜月华, 朱俊蕾. 不含 4-圈和 7-圈的平面图列表均匀染色[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2007, 30(4): 6-10. Bu Y H, Zhu J L. Equitable list coloring of planar graphs without 4- and 7- cycles [J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2007, 30(4): 6-10.

[4] 魏白, 黄元秋, 郭婷, 等. 一类图在小亏格曲面上的嵌入[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2012, 35(5): 24-29. Wei B, Huang Y Q, Guo T, et al. Embedding on surfaces with small genus of one type of graph [J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2012, 35(5): 24-29.

[5] 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文, 等. 关于图的邻点可区别全染色[J]. 中国科学: A 辑, 2004, 34(5): 574-583.

[6] 姚兵, 程辉, 姚明, 等. 图着色下的树顶点邻集的行为[J]. 数学物理学报, 2011, 31(2): 567-576. Yao B, Cheng H, Yao M, et al. Behaviors of vertex neighbors of trees under graph colorings [J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31(2): 567-576.

[7] Wang W F, Wang Y Q. Adjacent vertex distinguishing total coloring of graphs with lower average degree [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2008, 12(4): 979-990.

[8] Wang Y Q, Wang W F. Adjacent vertex distinguishing total colorings of outerplanar graphs [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2010, 19(2): 123-133.

[9] Hulgan J. Concise proofs for adjacent vertex-distinguishing total colorings [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(8): 2548-2550.

[10] Wang H Y. On the adjacent vertex-distinguishing total chromatic numbers of the graphs with $\Delta(G) = 3$ [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2007, 14(1): 87-109.

[11] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. London, Basingstoke, New York: The MacMillan Press Ltd, 1976.

【中文责编:庄晓琼 英文责编:肖菁】