

# 关于图形的极大联数

黄 奇 华

在生产实践和科学实验的斗争中，我们好些时候会遇到这样的一个问题：对给定的一些点（比如军事据点、仓库、村庄等），如何设计它们的联系线路（比如电话线路），使得它们相互之间的联系最紧密；把这个问题提练成为数学问题，就如H. Whitney在他所著的《图论及其应用》一书中所提出的一个没有解决的问题，“ $n$ 个顶点的图，其极大联数为何？”<sup>1)</sup>，对这个问题本文是这样解答的：首先找出一些具有 $n$ 个顶点的正则 $h$ 次齐次（当 $n$ 与 $h$ 均为奇数时，为亚齐次）的图形，其中 $h$ 是满足等式 $2m = nh + q$ 的正整数，然后将图形定义成一个运输网络，把求图形的 $h$ 条互不相交的边转化为求运输网络的最大流量问题；由魏特内（Whitney）定理<sup>2)</sup>得知图形的极大联数，最后，在这种图形上添加一些边，直至图形具有 $m$ 条边时为止，这样的图形便具有极大联数 $h$ 了。

## §1. 引言

从《图论及其应用》这本书的第20章的定理6“在一个 $h$ -联的图里，每一顶点的次数 $\geq h$ ”这个论断，立刻可以得知由 $n$ 个顶点 $m$ 条边作成的连接图最多是 $h$ -联的，其中 $h$ 是满足下面等式的正整数

$$2m = nh + q$$

这里 $q$ 也是正整数，并且 $0 \leq q < n - 1$ ，因此从这个等式引出如下的定义是十分合理的，一个连接图 $G$ ，若其联数 $h$ ，边数 $m$ 与顶点数 $n$ 满足上述等式，则称 $G$ 是其极大联数的。那末，到底有没有这种其极大联数的图形？这就是本文所要解决的问题。

## §2. 基本概念、规定及基本定理

在解答我们的问题之前，先介绍一种叫做辐射对称的图形，为此我们来看图1（具偶数个顶点）和图2（具奇数个顶点）两个图形，先看图1，如图所示，我们把点 $a_1, a_2, \dots, a_{1/2}$ 叫做顶点，这 $1/2$ 个顶点作成圆周式的排列，当顶点 $a_i$ 与顶点 $a_j$

1) 见《图论及其应用》的附录IV中的第11个问题。译者注(法)贝尔热(Berge, C.)

2) 李德昂译，上海科学技术出版社

2) 见原书p. 214

$a_1, a_2, a_3, a_4$  联接时, 就分别作出联接段:  $a_1a_4, a_1a_3, a_1a_2, a_1a_3a_2a_1a_4$ 。我们把顶点  $a_1, a_2, a_3, a_4$  叫做顶点  $a_1$  的联接点, 而顶点  $a_2, a_3, a_4, a_1$  叫做顶点  $a_1$  的非联接点。顶点  $a_1$  本身叫做辐射点。再看图 2, 在图 2 里,  $b_1$  为辐射点, 它的联接点与非联接点分别为:  $b_2, b_3, b_4$  和  $b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}$ 。辐射点  $b_1$  与它的联接点作成的联接段为:  $b_1b_2, b_1b_3, b_1b_4$ 。我们细心观察一下, 这两个图形的联接点关于它们自己的辐射点在位置的排列上有什么共同的特点? 容易看出, 它们都是十分“对称”的, 这种“对称”表现为: 以辐射点为端点按顺时针方向和逆时针方向沿圈周行走时, 中间所经过的联接点或非联接点在相等的长度上恰成一一对应。对于这种“对称”, 我们暂且叫做关于某个顶点的辐射对称, 今把辐射对称的定义所述如下:

定义  $n$  个顶点  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  作成圆周式的排列, 其中  $a_1$  叫做辐射点, 它有  $m$  ( $m < n-1$ ) 个联接点和  $n-m-1$  个非联接点, 若以辐射点  $a_1$  为始点, 按反时针方向和顺时针方向沿圈周行走时, 所走出来的凡是长度相等的两条道路, 其终点同为  $a_1$  的联接点或非联接点, 我们就说所与的  $n-1$  个顶点  $a_2, a_3, \dots, a_n$  是关于顶点  $a_1$  成辐射对称。

若把一个线性图  $G$  的顶点分布在一个圆周上使作圆周式的排列,  $G$  上的任意两点  $P$  与  $Q$  的圆周距离是指沿圆周方向从  $P$  走到  $Q$  时所经过图  $G$  的顶点的个数 (计算个数时, 始点  $P$  不算在内, 但终点  $Q$  算在内); 若行走是沿圆周的反对称方向, 则说圆周距离是正的, 反之便就是负的。

所谓两个顶点叫做圆周上相邻的, 若这两个顶点的圆周距离等于 1 或 -1。

现在可以把话说回来, 确实存在某些辐射对称图及其诱导图, 它们是具有极大联数的, 本文仅举出互为极端图又十分特殊的两种辐射对称图及其诱导图, 一种叫做 A 型的, 另一种叫做 B 型的。

我们首先介绍属于 B 型的具极大联数的图形。为此, 让我们来观察一下前面提到的等式

$$2m = ah + q$$

中  $a$  和  $h$  的奇偶性。显然, 它们可能的情形仅有如下四种:

1.  $a$  和  $h$  均为偶数
2.  $a$  为奇数,  $h$  为偶数
3.  $a$  为偶数,  $h$  为奇数
4.  $a$  和  $h$  均为奇数

对于上述这四种情形的具极大联数的最简单的图形就是怎么个样子的呢? 就我们的常识来看, 最简单的莫如齐次图形了, 然而在上述四种情形中, 能为齐次图的只是前面三种情形, 此时, 等式中的  $q$  为 0, 现在就实实在在地分别构造出对应于前面三种情形的齐次图。



$j$ 在运输网络里有一条边把它们联接起来。显然，对于我们这里所讨论的图形，当且仅当  $1 < |i-j| \leq k$  或  $n-k < |i-j| \leq n-1$ ，变量  $X_{ij}$  才是有边联接的。

为了醒目起见，我们把位在第一横行里，第二个指标是发点的联接点的编号数的变量组，除左上角的那个用发点的编号数与收点的编号数作为自己的指标的变量外，均用矩形  $\square$  关起来，显然，发点的联接点的编号数的全体，就是这些变量连同左上角的那个变量一起的第二个指标的全体。与此相仿，对于第一纵列也是一样，用矩形  $\square$  关起来的那个变量组，连同左上角的那个变量在内，它们的第一个指标的全体就是收点的联接点的编号数的全体。反之亦然。所以，凡是在表格中位在第一横行与第一纵列中，被矩形关起来的变量都是有边联接的。

不难看出下面的  $X$  值

位在第一横行：

$$X_{12} = X_{13} = \dots = X_{1,r-1} = X_{1r} = X_{1,r+1} = \dots = X_{1,k+1} = 1$$

$$X_{1,n-k+1} = X_{1,n-k+2} = \dots = X_{1n-1} = X_{1n} = 1$$

位在第一纵列：

$$X_{1r} = X_{2r} = \dots = X_{r-1,r} = X_{r,r} = X_{r,r+1} = \dots = X_{r,k+r} = 1$$

$$X_{n,r-k+1} = X_{n,r-k+2} = \dots = X_{n-1,r} = X_{nr} = 1$$

位在主对角线上：

$$X_{11} = X_{22} = \dots = X_{r-1,r-1} = X_{r,r} = X_{r+1,r+1} = \dots = X_{n-1,n-1} = X_{nn} = 1$$

位在平行于主对角线的‘线投’上：

$$X_{r-k+1,1} = X_{r-k+2,2} = \dots = X_{n-r+1,n-k} = 1$$

位在左上角：

$$X_{1r} = 2k-1$$

表格中其余的  $X_{ij}$  均取值 0

是表格 1 的基本可行解，在这个解里，位在第一横行和第一纵列中且取 1 作值的都分解分别地恰好是第一横行和第一纵列中用矩形关起来的那些变量，根据前面提到的使用矩形的规定，它们是有边联接的，至于位在平行于主对角线的‘线投’上的变量  $X_{ij}$ ，由于顶点  $i$  到顶点  $j$  的圆周距离的绝对值  $d = |i-j|$ ，因有  $1 < |i-j| = r-1 \leq k$ ，这就表明了顶点  $i$  与顶点  $j$  是有边联接的，故上述的基本可行解是容许的，我们就一个基本可行解是容许的，若果它的那些取 1 作值的变量（主对角线上的除外）均有边联接，否则就是非容许的。

2、发点 1 与收点  $r$  不相邻 在这个情形下，收点  $r$  的编号数取整数位于区间  $[k+2, n-k]$ ；此时收点  $r$  的联接点为： $r-k, r-k-1, \dots, r-2, r-1$  和  $r+1, r+2, \dots, r+k-1, r+k$ 。对应的运输网络方程组如表格 2 所示。在这个表格 2 里，由于发点与收点不相邻，故发点的联接点的编号数的全体就是位在第一横行里那些用矩形关起来的变量的第二个指标的全体，相仿地，收点的联接点的编号数的全体，就是位在第一纵列中那些用矩形关起来的变量的第一个指标的全体。

的。因此，为节省篇幅，我们就不再每次都来找出顶点的联接点的编号数，而是直接通过表格表达出来，为此，我们做个约定：(i) 在情形1和情形2不相容的情形下，顶点的联接点的编号数的全体，只是在表格的第一横行中用矩形关起来的变量组的第二个指标的全体，而收点的联接点的编号数的全体，则在表格的第一纵列中用矩形关起来的变量组的第一个指标的全体。(ii) 在情形3不相容的情形下，左上角的变量虽无矩形关起来，但它的第一个指标也是收点的联接点的编号数，第二个指标也是顶点的联接点的编号数，根据前面的情形1所提的关于变量使用的规定，可知此处所作的约定是合理的。

取如下面的取值

在第一横行：

$$X_{11} = X_{12} = \dots = X_{1n} = 1$$

$$X_{1n,1} = X_{1n,2} = \dots = X_{1n,n} = X_{1n} = 1$$

在第一纵列：

$$X_{1,1} = X_{2,1} = \dots = X_{r,1} = X_{r,1r} = X_{r,1r} = X_{r,1r} = \dots = X_{r,2,1r} = X_{r,2r} = 1$$

在主对角线上

$$X_{11} = X_{22} = \dots = X_{r,1r-1} = X_{r,1r-1} = X_{r,2,1r-1} = \dots = X_{nn} = 1$$

在主对角线上边的一条‘横段’上：

$$X_{1,2,1} = X_{1,2,2} = \dots = X_{r,2,1r-1} = 1$$

在主对角线下边的一条‘横段’上：

$$X_{r,2,1r-1} = X_{r,2,1r-2} = \dots = X_{nn,2} = 1$$

在左上角：

$$X_{1r} = 2k$$

表格中其余的 $X_{ij}$ 均取值0

在表格2的基本可行解，很容易看出，取1作值的变量 $X_{ij}(i \neq j)$ 是有边联接的，这对于表格中的第一横行与第一纵列中用矩形关起来的变量那是不言而喻的，就是位于平行于主对角线上、下方的两条‘横段’上的变量 $X_{ij}$ ，也是有边联接的，因其指标对应的顶点 $i$ 和 $j$ 的圆周距离的绝对值 $d = |i - j| = k$ 。所以上述的基本可行解是可行的。在以后，我们证明一个基本可行解是否为可行解时，都要借助两个顶点间的圆周距离的绝对值 $d$ 来判断那些取1作值的变量是否有边联接，为此，我们就管这个绝对值 $d$ 叫做变量 $X_{ij}$ 的指标距。

对于情形3我们又如何作出它的具极大联接的图形呢？关于这个，只须从一个具 $n$ （为偶数）个顶点的E型正则 $h+1$ （ $h$ 为奇数）次齐次图形里，把联接顶点 $2p-1$ 和顶点 $2p$ （ $p=1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ ）的所有边都去掉就行了，由于这样得到的诱导图形其形状像一个平齿轮，我们管它做平齿轮式正则 $h$ 次齐次图，它也是具极大联接的。图5就是一个边数 $m=30$ ，顶点数 $n=12$ 的平齿轮式正则5次齐次图。在这种图形上，具奇数编号的顶点与其偶数编号的顶点的联接方式是不同的，所以我们要通过G.B.Dantzig, D.R.Fulkerson运输问题表格方程组来证明它是 $h$ -联接时，在其上任

取两点作为发点和收点,就要注意到发点与收点的编号数的奇偶性,这时可能出现四种情形如下四种:

- (1) 发点与收点的编号数均为奇数
- (2) 发点的编号数是奇数,但收点的是偶数
- (3) 发点与收点的编号数均为偶数
- (4) 发点的编号数是偶数,但收点的编号数是奇数

然而,我们关心的只是图的联接,因此取定的两点那一点作发点和那一点作收点,对于讨论我们的问题是无关紧要的,故只须讨论前三种情形就够了,下面就主要讨论上述三种情形下所对应的平台轮式正则齐次图运输网络各自在发点与收点不相邻时的最大流量。

### 1. 发点与收点相邻

(1) 发点与收点的编号数均为奇数 无碍我们对问题一般性的讨论,我们取定顶点1作发点,若点 $r$ 是收点,由于它与发点1相邻,则编号数 $r$ 取奇数值于区间 $[3, k+1]$ 和 $[n-k+1, n-1]$ 。因为所给的图是平台轮式正则齐次图,故此处总假定 $k \geq 2$ ;由于这种图形具有旋转合同的性质,我们只须讨论收点 $r$ 取奇数值于区间 $[3, k+1]$ 就行了,为了说明这点,我们先介绍两个概念以及与之相对的另一两个概念。

一个是,若把一个线性连续图的顶点按反时针或顺时针方向作圆周式排列,在其上的两个顶点 $P$ 与 $Q$ 的联接方式叫做同向相同的,若点 $P$ 的联接点与点 $Q$ 的联接点沿圆周相同的方向上都有相等的小数,并且依次地有相等的圆周距离(顶点 $P$ 与 $Q$ 各与它们自己的联接点计算圆周距离的始点)。与联接方式同向相同的概念相对,我们给出联接方式叫做反向相同的概念,两个顶点 $P$ 与 $Q$ 的联接方式叫做反向相同的,若点 $P$ 的联接点与点 $Q$ 的联接点在沿圆周相反的方向上都有相等的小数,并且依次地有相等值相等的圆周距离。另一个是,顶点作成圆周式排列的线性图在圆周上的两条长度相等的道路 $\mu, \nu$ 叫做同向恒同的,若 $\mu, \nu$ 的顶点的联接方式一对一对地依次同向相同的。与同向恒同相对,我们也可以给出两条道路 $\mu$ 与 $\nu$ 反向恒同的定义,若 $\mu, \nu$ 的顶点的联接方式一对一对地依次反向相同的。

最后,在回到我们的问题之前,还须注意到这样一个事实,就是,在同一个平台轮式正则齐次图 $G$ 上,以顶点 $P$ 为始点顶点 $Q$ 为终点的道路 $\omega_1 = [P, \dots, Q]$ 与以顶点 $R$ 为始点,顶点 $P$ 为终点的道路 $\omega_2 = [R, \dots, P]$ 若是同向恒同的,那么以 $P$ 为发点, $Q$ 为收点的运输网络与以 $R$ 为发点, $P$ 为收点的运输网络实质上是相同的,因为对 $G$ 施行一个适当的旋转,便能使 $\omega_1$ 与 $\omega_2$ 合同。

现在可以回答前面提出的问题,为什么只须讨论收点 $r$ 取奇数值于区间 $[3, k+1]$ 就行了?原来在平台轮式正则齐次图上以顶点1为始点,顶点 $n-r'+2$ 为终点(此处 $r'$ 是区间 $[3, k+1]$ 上的一个奇数值)的道路 $[1, n, n-1, \dots, n-r'+2]$ ,在收点 $r$ 取值的区间 $[3, k+1]$ 上,可以找到一奇数 $r'$ ,便有一条与它同向恒同的道路 $[r', r'-1, \dots, 2, 1]$ 至为一一对应。

在相应图的情形下，平抛式正则 $h$ 次齐次图所对应的运输网络方程组如表格所示。

在源点下面的 $X$ 值

在第一行：

$$X_{1,1} = X_{1,2} = \dots = X_{1,r-1} = X_{1,r} = X_{1,r+1} = \dots = X_{1,k} = 1$$

$$X_{1,k+1} = X_{1,k+2} = X_{1,k+3} = \dots = X_{1,n-1} = X_{1,n} = 1$$

在第一列：

$$X_{1,r} = X_{2,r} = X_{3,r} = \dots = X_{r-1,r} = 1$$

$$X_{r+1,r} = X_{r+2,r} = \dots = X_{n,r} = 1$$

$$X_{n-1,r} = X_{n,r-1,r} = \dots = X_{n,r} = 1$$

在主对角线上：

$$X_{1,1} = X_{2,2} = X_{3,3} = \dots = X_{r-1,r-1} = X_{r,r} = X_{r+1,r+1} = \dots = X_{n,n} = 1$$

在第二级列：

$$X_{r+1,1} = 1$$

在主对角线下边的一条‘线役’上：

$$X_{r+1,1,1} = X_{r+2,1,2} = \dots = X_{n,r,n-1} = 1$$

在左上角：

$$X_{1,1} = 2k - 1$$

表格中其余的 $X_{ij}$ 均取值0

是表格3的基本可行解。在此表格中变量 $X_{r+1,1}$ 和在主对角线下边的一条‘线役’上的变量： $X_{r+1,1,1}, X_{r+2,1,2}, \dots, X_{n,r,n-1}$ 由于它们的阶标题 $d=r-1$ ，而有 $2 < d < k$ ，根据平抛式正则 $h$ 次齐次图的定义，图上任二顶点 $i$ 与 $j$ ，若 $|i-j| \rightarrow 1$ ，满足不等式 $2 < |i-j| < k$ 或 $n-k < |i-j| < n-2$ ，则有一条边联接；又， $i$ 与 $j$ 之中有一是点1，另一是点 $n$ 时，也是有边联接的，若 $|i-j| = 1$ ，可以假定 $i=j-1$ ， $j$ 为偶数时，点 $i$ 与 $j$ 有边联接；若点 $i$ 与 $j$ 都不满足上述条件之一时，便没有边联接，由此不难看出上述取1作值的变量也是有边联接的，因而基本可行解是可行的。

(2) 发点是奇数编号。例如取点1作发点，收点是偶数编号，设为 $r$ ，此时 $r$ 可在区间 $[4, k+1]$ 和 $[n-k+1, n]$ 取偶数值。在我们这个情形下，还能不能像情形(1)那样只须给其中一个区间，例如 $[4, k+1]$ 就能把另一个区间 $[n-k+1, n]$ 的情形实际上也包括进去呢？不能，因为在图上以顶点1作始点，以点 $r$ 作终点的道路： $[1, 2, \dots, r]$ （其中 $r$ 取偶数值于区间 $[4, k+1]$ 与长度相等的道路： $[n-r+2, n-r+3, \dots, n-1, n, 1]$ 或其逆道路： $[1, n, n-1, \dots, n-r+2]$ 都不能与之恒同，故非要把这两种情形来分别求解不可。

当 $r$ 在区间 $[4, k+1]$ 上取偶数时，发点1的联接点已如(1)所述，而收点 $r$ 的联接点为： $1, 2, \dots, r-2$ 和 $r+1, r+2, \dots, r+k$ 以及 $n+r-$

$k+1, \dots, n$ , 共有  $2k-1$  个。对应的运输网络方程组如表格 4 所示, 若无必要, 为了节省篇幅, 我们不再把运输网络方程组的基本可行解表述出来, 我们作出一些规定, 通过表格直接表达出来, 这些规定如下:

在第一横行和第一纵列中, 用若干个矩形所关起来的若干组变量, 如无另加注明, 就分别表示基本可行解在第一横行和第一纵列中变量为取 1 取值的部分解。当然, 并没有被矩形关起来的变量, 除左上角的变量  $x_n$  外, 其余的变量总是被假设为零。除第一横行和第一纵列外, 在表格中写出来的变量, 如无另加注明, 就表示取 1 取值, 而没有写出来的变量均取值 0, 至于省略号“……”所代表的变量是否取 1 取值, 那要看其首尾的变量是否取 1 取值; 最后, 左上角的变量  $x_n$  的数值等于第一横行或第一纵列中取 1 取值的变量的个数。

至于基本可行解的容许与否, 那就须要另加证明, 记住  $r$  的取值区间, 就不难由表格 4 的基本可行解是容许的。

当  $r$  在区间  $[n-k+1, n]$  上取偶数值时, 其对应的运输网络方程组中它的基本可行解如表格 5 所示, 容易看出  $r$  在本区间上不是对所有的偶数值此基本可行解都是容许的 (例如  $r=n$  就是)。所以, 我们必须探讨此基本可行解的容许条件, 为此, 先来算出各个部分解中任一变量的阶标距。

① 部分解  $x_{r,1}, \dots, x_{r,1} = 1$  仅含一个变量, 其阶标距  $d_1 = r+k-n-1$ , 故  $0 < d_1 < k-1$ 。

② 部分解  $x_{r,1}, \dots, x_{r,1} = x_{r,2}, \dots, x_{r,2} = \dots = x_{r,1}, \dots, x_{r,1} = 1$  中任一变量的阶标距  $d_2 = n-r$ , 故  $0 < d_2 < k-1$ 。

③ 部分解  $x_{r,1}, \dots, x_{r,1} = 1$  也是仅含一个变量, 其阶标距  $d_3 = r+k-n-1$ , 故  $0 < d_3 < k-1$ 。

比较  $d_1, d_2$  和  $d_3$  可知  $d_1 = d_3$ , 故只须考究  $d_1$  和  $d_2$  就够了。联系所给的图形, 求  $d_i$  (此处  $i=1, 2$ ) 对同一两个顶点有边连接的充分条件, 便可看出, 表格 5 所示的基本可行解只在  $2 < d_i < k-1$ , 并且  $k > 3$  时才是容许的, 所以我们还要对  $d_i=0, 1$  以及  $k=2$  时的情况加以讨论。

设  $i=1$ , 若  $d_1=0$ , 有  $r=n-k+1$ , 此时要求  $k$  为  $\geq 3$  的奇数; 若  $d_1=1$ , 有  $r=n-k+2$ , 此时要求  $k$  为  $\geq 4$  的偶数 ( $k=2$  为另列的情况)。

设  $i=2$ , 若  $d_2=0$ , 有  $r=n$ ; 若  $d_2=1$ , 有  $r=n-1$ , 此是奇数, 不在我们讨论之内, 最后, 若  $k=2$  时, 有  $r=n$ , 而已被包含在  $d_1=0$  的情况中, 故无须另作讨论。综上所述, 须要讨论的情况仅有下面三种:  $d_1=0, d_1=1$  和  $d_2=0$ ; 其对应的运输网络方程组及容许的基本可行解 (以后简称容许解) 分别如表格 6、7 和 8 所示, 在此, 我们看到表格 6 和表格 8 里, 有的变量 (非第一横行或第一纵列) 虽然在表格上写出来, 但它却是取 0 取值的, 故在它的旁边标以记号 “=0” 或记号 “0”。

(3) 发点与收点的编号数均为偶数。可取顶点 2 作发点, 顶点  $r$  作收点, 其编号数  $r$  取偶数值于区间  $[4, k+2]$  或区间  $[n-k+2, n]$  上, 这种情形与上述取顶点 1 作发点的情形 (1) 完全相同, 事实上, 由于所给的图形的轴对称性 (其对



... 的所有顶点划分两部分, 一部分是顶点集:  $\left\{ 2, 3, 4, \dots, i, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \right\}$  在对称轴的一侧, 另一部分是:  $\left\{ 1, n, n-1, \dots, \dots, n-i+2, \dots, \frac{n}{2}+3, \frac{n}{2}+2 \right\}$ , 在对称轴的另一侧, 从顶点的联接方式来看, 顶点2与顶点1, 顶点3与顶点n, 顶点4与顶点n-1等等, 一般地, 顶点*i* ( $3 \leq i \leq \frac{n}{2} + 1$ ) 与顶点*n-i+3*成轴对称, 即顶点的联接方式 反向相联。) 因此在我们这里所给的情形下, 若收点的编号数在区间  $[4, k+2]$  上取偶数, 则与上述情形(1)取顶点*n-i+3*作收点时相当(注意! 情形(1)的发点是顶点1的)。若收点的编号数在区间  $[n-k+2, n]$  上取值*n-i+3* (其中  $3 \leq i \leq k+1$ ), 则与情形(1)取顶点*i*作收点的相当——沿对称轴将图形作  $180^\circ$  旋转能使(3)的发点与收点分别同(1)的发点与收点重合, 对于其它的顶点也是一样。总之取轴对称下的对应顶点就是了, 故无须另作讨论。

## 2. 发点与收点不相邻

(1) 发点是奇数编号, 收点也是奇数编号 也是取顶点1作发点, 并使收点的编号数为*r*, 它取值于区间  $[k+2, n-k]$  上的奇数, 在此处, 当然也是假定  $k > 2$ , 这时我们分开  $k > 2$  与  $k = 2$  两种情形来寻求其基本可行解。

当  $k > 2$  即  $k > 3$  时, 图形的运输网络方程组及其基本可行解如表格9所示。显然表格9所示的基本可行解是可行的, 这是因为在任一取1作值的变量  $X_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 均有边联接, 这对于第一横行与第一纵列中取1作值的变量, 那是毫无疑问的, 就是对于主对角线上边和下边的两条“链段”的部分解中的变量也是有边联接的, 前者是十分显然的, 至于后者也是不难看出, 由于变量:  $X_{r, r-1}, X_{r, r-2}, \dots, X_{n-1, n-2}$  中的任一个  $X_{ij}$ , 其附标距为  $i-j = k-1$ , 都假定  $k > 3$ , 所以  $k-1 > 2$ , 从附点*i*与点*j*有边联接, 最后, 第二纵列中取1作值的变量  $X_{n, n-1}$  的附标距  $d = n-2$ , 故有边联接。

可以看出表格9的部分解:  $X_{r, r-1}, X_{r, r-2}, \dots, X_{n-1, n-2} = 1$  中任一变量  $X_{ij}$  的附标距在  $k=2$  时为1, 因此点*i*与点*j*不一定有边联接, 故表格9所示的  $k > 3$  时基本可行解对  $k=2$  是不适用的。

当  $k=2$  时, 视具体情况而定, 图形的运输网络方程组及其基本可行解如表格10或表格11所示。此二表格的第一纵列从变量  $X_{1, r}, X_{1, r-1}$  直到变量  $X_{r-3, r}$  均有  $r-3$  个, 由于正整数  $r-3$  是偶数, 用4除它而表成  $4a+b$  时, 余数*b* 或为0或为2, 事实上, 若用  $2c$  ( $c$  是正整数) 代替  $r-3$ , 则  $2c = 4a+b$ , 由于  $0 \leq b < 4$ , 故可改写成  $b = 2c - 4a = 2(c-2a) < 4$ , 从而有  $0 \leq c-2a < 2$ , 因*a*, *c* 是正整数, 所以要么  $c=2a$ , 则  $b=0$ , 要么  $c-2a=1$ , 则  $b=2$ 。

若  $b=2$  时,  $r-3 = 4a+2$ , 其运输网络方程组的基本可行解如表格10所示, 自第  $r-3$  横行始, 倒叙至第3横行止, 那些分布在主对角线两侧, 并且用方形

□ 关起来的变量均表示取 1 作值；仔细观察一下这些用方形关起来的变量形状，就容易看出它们构成的规则是：一个三角形接着一个三角形，比如，由变量  $X_{r-2, r-2}$  和变量组： $X_{r-2, r-1}, X_{r-1, r-2}, X_{r-1, r-1}$ ，一起就形成一个三角形；由变量  $X_{r-1, r-1}$  和变量组： $X_{r-1, r-2}, X_{r-2, r-1}, X_{r-2, r-2}$  组成的，我们把诸如变量  $X_{r-2, r-2}$  和  $X_{r-1, r-1}$  叫它为所在的三角形的顶点。而诸如： $X_{r-2, r-1}, X_{r-1, r-2}, X_{r-1, r-1}$  和变量组： $X_{r-1, r-2}, X_{r-2, r-1}, X_{r-2, r-2}$  叫它为所在的三角形的底边。由形如这样的一串三角形组成的部分解叫做三角形解。它可自下而上地表示如下：

$$\begin{array}{ll} \text{顶点: } X_{r-2, r-2} = 1 & \text{底边: } X_{r-2, r-1} = X_{r-1, r-2} = X_{r-1, r-1} = 1 \\ \text{顶点: } X_{r-1, r-1} = 1 & \text{底边: } X_{r-1, r-2} = X_{r-2, r-1} = X_{r-2, r-2} = 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \text{顶点: } X_{11} = 1 & \text{底边: } X_{12} = X_{21} = X_{22} = 1 \end{array}$$

一般地

$$\begin{array}{l} \text{顶点: } X_{r-p, p-1, r-p, p-1} = 1 \\ \text{底边: } X_{r-p, p-1, p-1, r-p} = 1, X_{r-p, p-1, r-p, p} = 1, X_{r-p, p-1, r-p, p-1} = 1 \end{array}$$

其中  $p = 1, 2, \dots, \frac{r-5}{4}$

显然，三角形解中的变量以及表格中其余取 1 作值的变量（主对角线，第一行和第一纵列的除外），由于每个变量  $X_{ij}$  的坐标距均为 2，因而有边联接，故表格所求的基本可行解是容许的。

若  $b=0$ ，则  $r-3=4n$ ，其运输网络方程组的基本可行解如表格 11 所示，与上述情形相似，三角形解可自下而上地表示为：

$$\begin{array}{ll} \text{顶点: } X_{r-3, r-3} = 1 & \text{底边: } X_{r-3, r-2} = X_{r-2, r-3} = X_{r-2, r-2} = 1 \\ \text{顶点: } X_{r-2, r-2} = 1 & \text{底边: } X_{r-2, r-3} = X_{r-3, r-2} = X_{r-3, r-3} = 1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \text{顶点: } X_{11} = 1 & \text{底边: } X_{12} = X_{21} = X_{22} = 1 \end{array}$$

最后，连同第一横行的变量  $X_{11}$  一起，可以构成最大的一个三角形，顶点是  $X_{11}$ ，底边是  $X_{12}, X_{21}, X_{22}$ 。一般地

$$\begin{array}{l} \text{顶点: } X_{r-p, p-1, r-p, p-1} = 1 \\ \text{底边: } X_{r-p, p-1, p-1, r-p} = 1, X_{r-p, p-1, r-p, p} = 1 \\ X_{r-p, p-1, r-p, p-1} = 1 \end{array}$$

此处  $p = 1, 2, \dots, \frac{r-3}{4}$ 。

也是显然，此三角形解中的变量和表格中其余取 1 作值的变量（主对角线的除外）都是有边联接的，故表格 11 的基本可行解是容许的。

(2) 发点是奇数编号，收点是偶数编号。设点 1 是发点，点  $r$  是收点，则编号数  $r$  取值于区间  $[k+2, n+k]$  上的偶数，由于存在与上述情形 (1) 相同的原因，我们须把  $k > 3$  与  $k = 2$  分开来寻求方程组的基本可行解。

情形(2) 容易确定, 其运输网络方程组及其容许解如表格12所示。

情形(2) 更多的运输网络方程组及其容许解出现的情况而定或如表格13或表格14所示。此二表格的第一纵列从变量 $X_{1,r}$ ,  $X_{1,1}$ 直到变量 $X_{r-1,1}$ , 均有 $r-3$ 个, 除 $r=1$ 是奇数, 总类为 $4n+b$ , 则余数 $b$ 成为1或为3。

情形(2) 时,  $r-3=4n+1$ , 其运输网络方程组及容许解如表格13所示, 其中运输网络方程组的一般式就是:

$$\text{顶点: } X_{r-1,p-1} + r_{-1}p_{-1} = 1$$

$$\text{边: } X_{r-1,p} + r_{-1}p_{-1} = X_{r-1,p-1} + r_{-1}p_{-1} = X_{r-1,p-1} + r_{-1}p = 1$$

边:  $r=1, 2, \dots, \frac{r-8}{4}$ 。最后还有一个小三角形

$$\text{顶点: } X_{1,1} = 1 \quad \text{边: } X_{1,1} = X_{1,1} = 1$$

情形(2) 时,  $r-3=4n+3$ , 其运输网络方程组及容许解如表格14所示, 它的运输网络方程组的一般式就是:

$$\text{顶点: } X_{r-1,p-1} + r_{-1}p_{-1} = 1$$

$$\text{边: } X_{r-1,p} + r_{-1}p_{-1} = X_{r-1,p-1} + r_{-1}p_{-1} = X_{r-1,p-1} + r_{-1}p = 1$$

边:  $r=1, 2, \dots, \frac{r-6}{4}$ 。连同第一横行的变量 $X_{1,1}$ 一起, 最后还有一个小三角形

$$\text{顶点: } X_{1,1} = 1 \quad \text{边: } X_{1,1} = X_{1,1} = 1$$

(3) 顶点与边点的编号数均为偶数。同顶点与边点相邻对的情形(3)一样, 根据这种图形的轴对称性, 我们无须再对本情形加以讨论, 因为它实际上被包括在顶点与边点不相邻对的情形(1)中去了。至此, 我们证明了

定理2 平面轴式正则 $h$ 次齐次图也是 $h$ -联的。

到这里, 我们总算对平面轴式正则齐次图讨论过了。虽然这种图形已经不具有轴对称性的性质, 但如果我们一定要求具有这个性质, 对于情形3还是有其较大联数的轴对称图形的。只要在一个具 $n$ (为偶数)个顶点的B型正则 $h-1$ ( $h$ 为奇数)次齐次图上用边把顶点 $i$ 与顶点 $\frac{n}{2}+i$ (其中 $i=1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ )联接起来就是了。

由于这种图形是个纺纱轮, 故叫纺纱轴式正则 $h$ 次齐次图。图6就是一个具 $n=12$ 个顶点,  $h=7$ 的纺纱轴式正则齐次图, 对于它, 下面定理成立

定理3 纺纱轴式正则 $h(=2k+1)$ 次齐次图的联数为 $h$ 。

其证法与定理1的相类, 在此从略。

现在仅剩最后的一种情形4了, 对于这种情形, 是否也有其较大联数的齐次图呢? 回答是否定的, 要严格而真正地作出具有奇数个顶点和奇数次 $h$ 次齐次图是根本不可行的。这是因为

引理 在一个具 $n$ 个顶点,  $m$ 条边 $h$ 次齐次图中,  $n$ 与 $h$ 至少有一是偶数。

理由很简单, 因为 $2m = nh$

那么是否由此可以得出结论, 任一具奇数个顶点的线性连接图(除上述介绍的B

型正则 $h$ 次齐次图外)不可能有极大联数。事实并非如此,我们来分析一下由定理2介绍的等式

$$2m = nh + q$$

当 $n, h$ 均为奇数时, $q$ 不能为0而必须是奇数,它的最简单的情形是,

$$2m = nh + 1$$

我们将此等式改动一下使成

$$2m = (n-1)h + h + 1$$

从这个式子回过头来看它的图形意义就是:有一个顶点是 $h+1$ 次的,其余 $n-1$ 个顶点均为 $h$ 次的,这样的图形当然存在,问题是,是否也具极大联数 $h-1$ ? 答案是肯定的,与情形3相仿,在一个具有顶点数 $n$ ( $n$ 是奇数)的B型正则 $h+1$ ( $h$ 是奇数)次图 $G$ 上,把连接顶点 $2p$ 与 $2p+1$ 的边统统去掉,其中 $p=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ 。

经过这样去掉边后所得到的图形除顶点1是 $h+1$ 次外,其余各点均为 $h$ 次,我们称这样的图形叫做B型正则 $h$ 次亚齐次图。图7就是一个 $n=23, h=11$ 次的亚齐次图。不难证明下述定理成立

定理4 B型正则 $h$ 次亚齐次图是 $h-1$ 联的。

证法与定理2相似,在此不予赘述了。

说到这里,B型的具极大联数的图形总算介绍完毕,本来到此就可以给出我们问题的解答,但为了可能以供实用起见,我们还得介绍A型的。所谓A型 $h$ 次正则齐次图乃是这样的一种特殊的轴对称图,在其上任取一顶点 $p$ 以作轴对称点,与B型的性质相反,其 $h$ 个邻接点 $p_1, p_2, \dots, p_h$ 是尽量地沿圆周远离此轴对称点 $p$ 的,并且沿圆周的任一方向,顺时针方向或反时针方向从点 $p_i$ 至点 $p$ 的圆周距离等于点 $p$ 至点 $p_i$ 的圆周距离,又,从点 $p_i$ 沿与三点 $p_i, p, p_h$ 所决定的圆周方向的反向走至点 $p_h$ 比中间没有经过轴对称点,如图8所示,它们与轴对称点 $p$ 联接成的图形象一个A字。按定义,A型正则齐次图只可能有两种,一种是具偶数个顶点的,其顶点次数必为奇数,图9就是这样的一种图形( $n=24, h=5$ )。另一种是具奇数个顶点的,其顶点次数必为偶数,图10就是这样的一种图形( $n=23, h=4$ )。而不可能有具偶数个顶点且次数为偶数的A型正则齐次图。事实上,确实存在这样的图形,它不但具极大联数,而且还不是连通的呢,图11就是这样的一种最简单的图形。下面介绍

定理5 A型正则 $h$ 次齐次图具极大联数 $h$

其证法与定理1的类似,于此不予赘述了。

(下接96页)



图 1



图 2

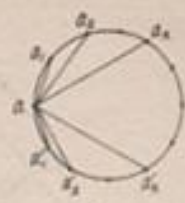


图 3



图 4



图 5



图 6

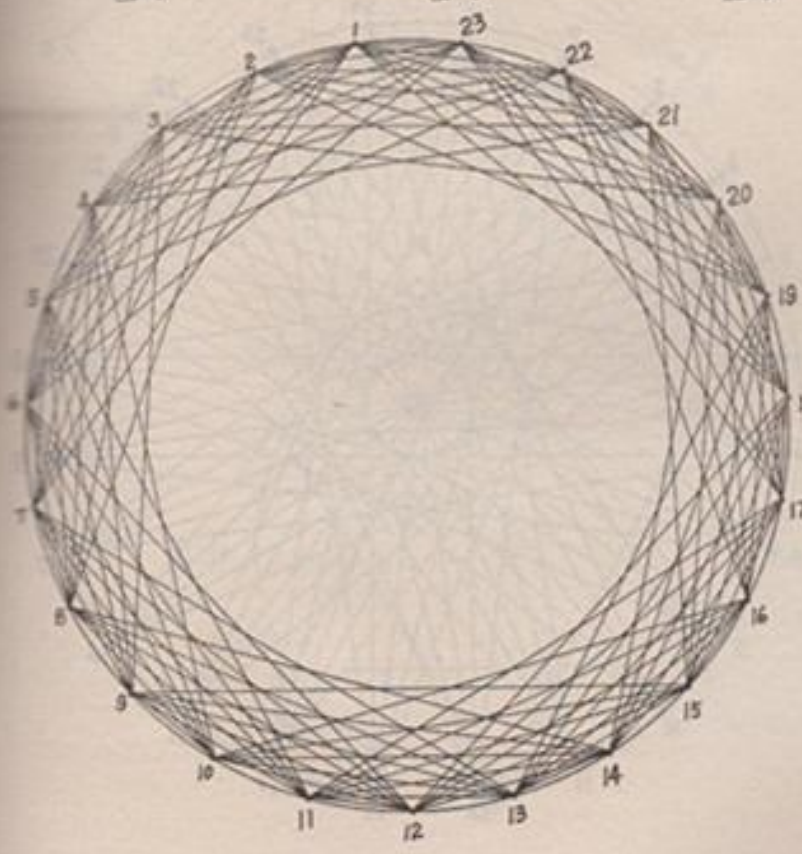
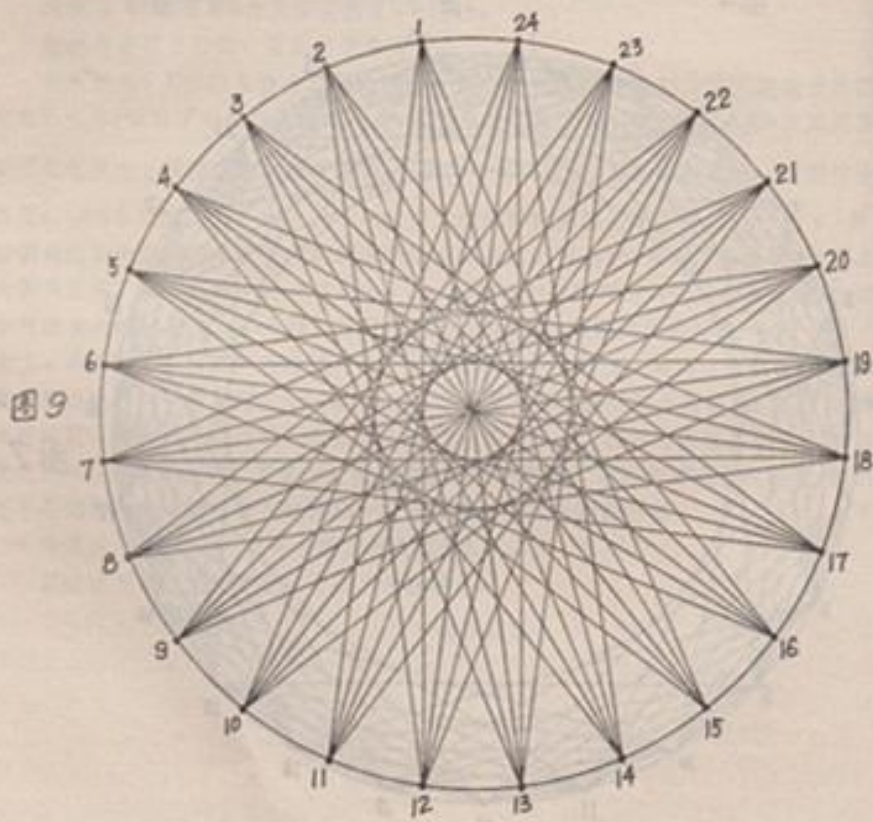
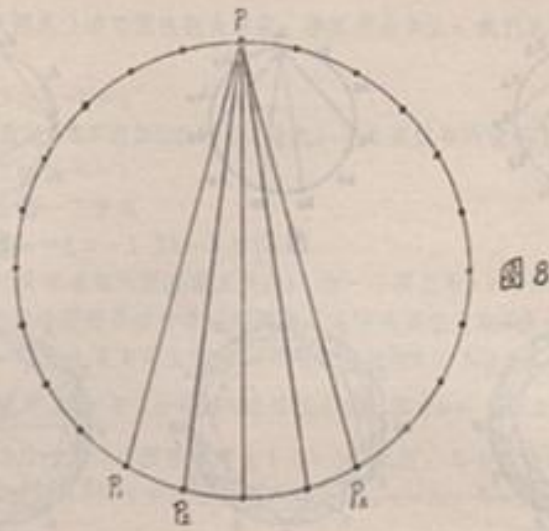
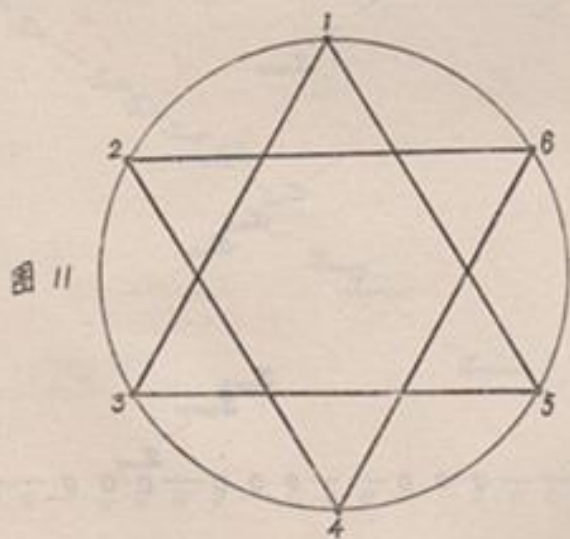
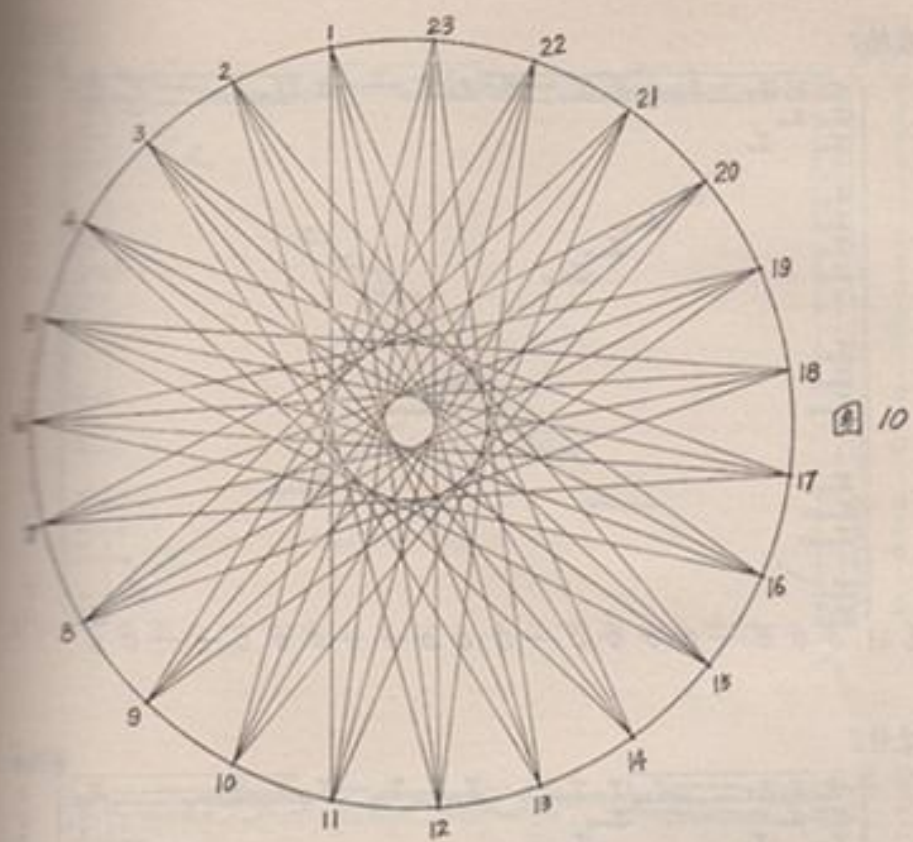


图 7





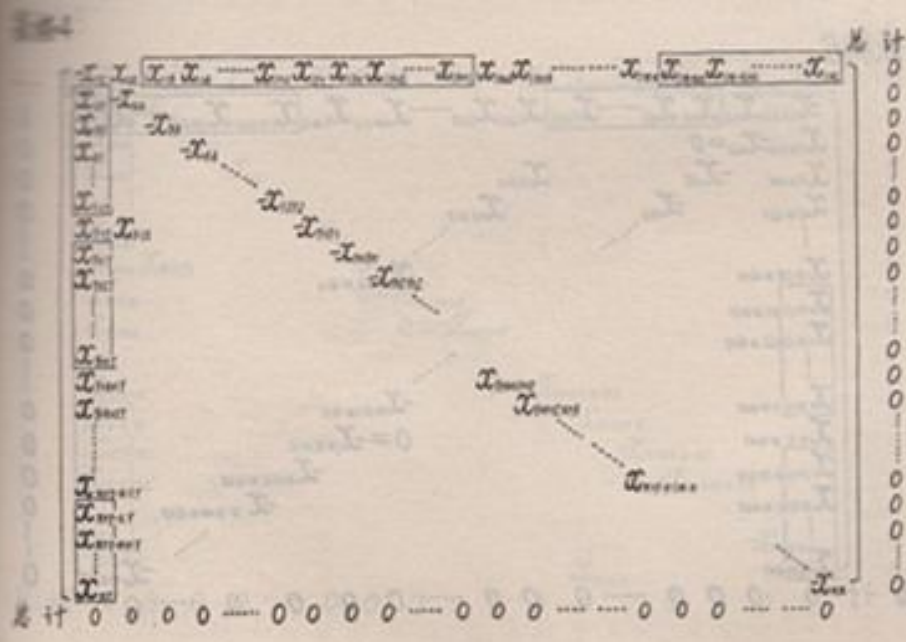
表格1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	总计
$x_1$													0
$x_2$													0
$x_3$													0
$x_4$													0
$x_5$													0
$x_6$													0
$x_7$													0
$x_8$													0
$x_9$													0
$x_{10}$													0
$x_{11}$													0
$x_{12}$													0
总计	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表格2

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	总计
$x_1$													0
$x_2$													0
$x_3$													0
$x_4$													0
$x_5$													0
$x_6$													0
$x_7$													0
$x_8$													0
$x_9$													0
$x_{10}$													0
$x_{11}$													0
$x_{12}$													0
总计	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0





表格5

$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{15}$	$X_{16}$	$X_{17}$	$X_{18}$	$X_{19}$	$X_{110}$	$X_{111}$	$X_{112}$	$X_{113}$	$X_{114}$	$X_{115}$	$X_{116}$	$X_{117}$	$X_{118}$	$X_{119}$	$X_{120}$								
$X_{21}$	$X_{22}$																										
$X_{31}$		$X_{32}$																									
$X_{41}$			$X_{42}$																								
$X_{51}$				$X_{52}$																							
$X_{61}$					$X_{62}$																						
$X_{71}$						$X_{72}$																					
$X_{81}$							$X_{82}$																				
$X_{91}$								$X_{92}$																			
$X_{101}$									$X_{102}$																		
$X_{111}$										$X_{112}$																	
$X_{121}$											$X_{122}$																
$X_{131}$												$X_{132}$															
$X_{141}$													$X_{142}$														
$X_{151}$														$X_{152}$													
$X_{161}$															$X_{162}$												
$X_{171}$																$X_{172}$											
$X_{181}$																	$X_{182}$										
$X_{191}$																		$X_{192}$									
$X_{201}$																			$X_{202}$								
总计	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表格6

$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{15}$	$X_{16}$	$X_{17}$	$X_{18}$	$X_{19}$	$X_{110}$	$X_{111}$	$X_{112}$	$X_{113}$	$X_{114}$	$X_{115}$	$X_{116}$	$X_{117}$	$X_{118}$	$X_{119}$	$X_{120}$																		
$X_{21}$	$X_{22}=0$																																				
$X_{31}$		$X_{32}$																																			
$X_{41}$			$X_{42}$																																		
$X_{51}$				$X_{52}$																																	
$X_{61}$					$X_{62}$																																
$X_{71}$						$X_{72}$																															
$X_{81}$							$X_{82}$																														
$X_{91}$								$X_{92}$																													
$X_{101}$									$X_{102}$																												
$X_{111}$										$X_{112}$																											
$X_{121}$											$X_{122}$																										
$X_{131}$												$X_{132}$																									
$X_{141}$													$X_{142}$																								
$X_{151}$														$X_{152}$																							
$X_{161}$															$X_{162}$																						
$X_{171}$																$X_{172}$																					
$X_{181}$																	$X_{182}$																				
$X_{191}$																		$X_{192}$																			
$X_{201}$																			$X_{202}$																		
总计	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

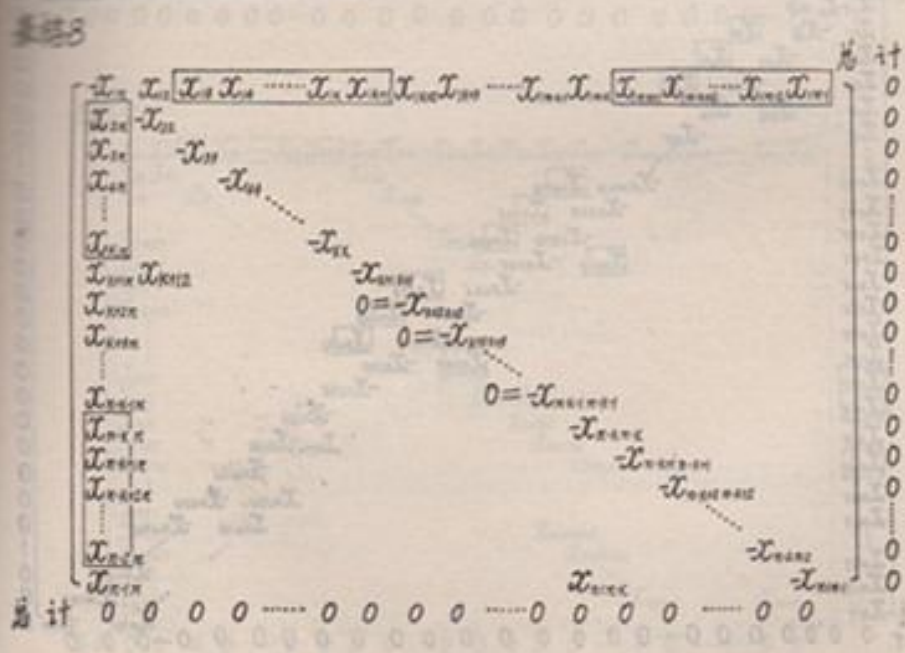
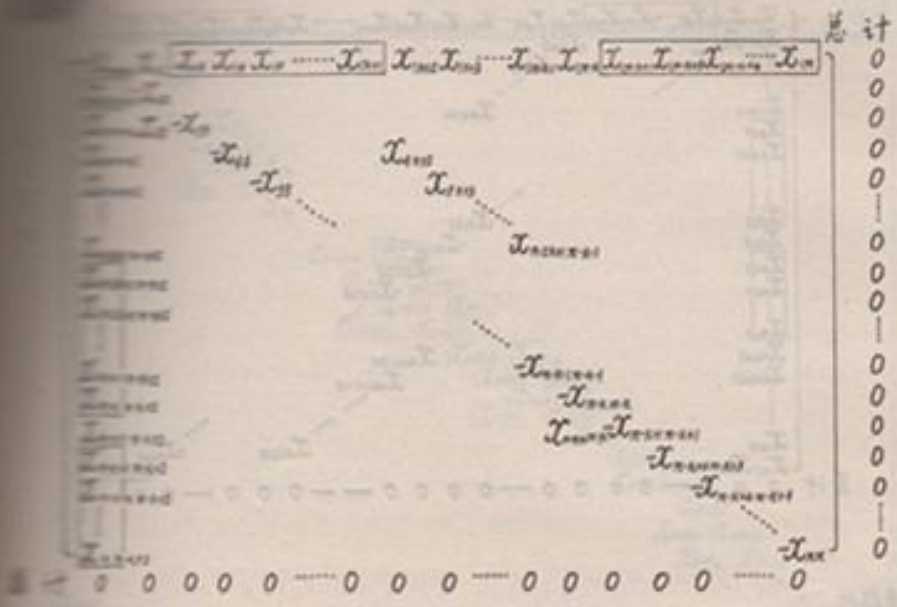
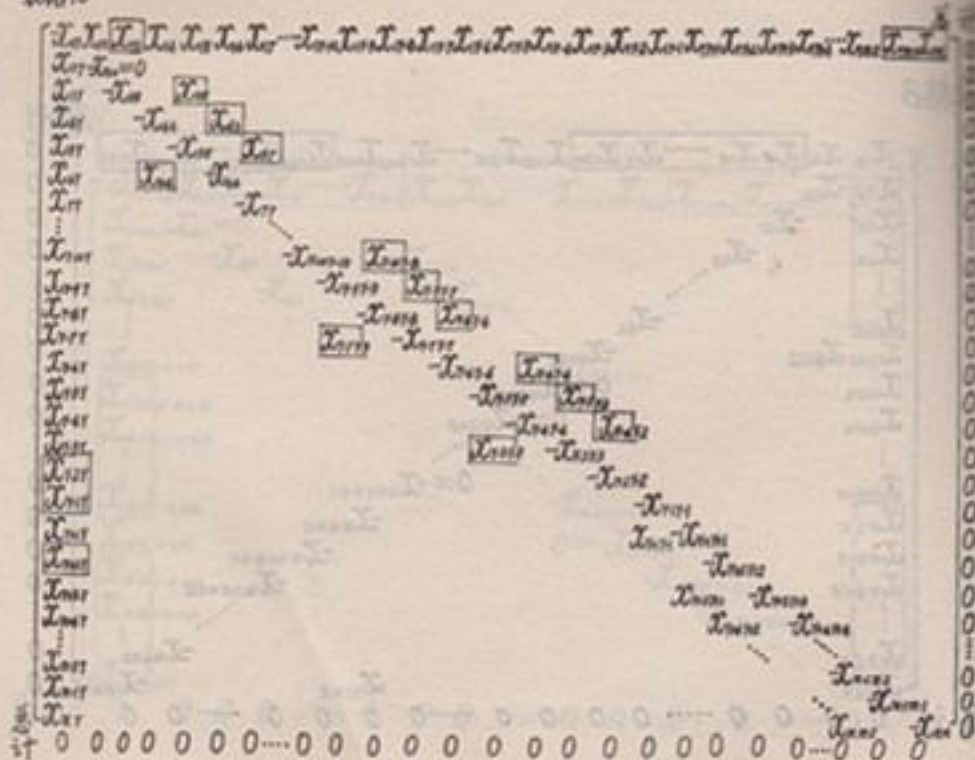


表89



表格10



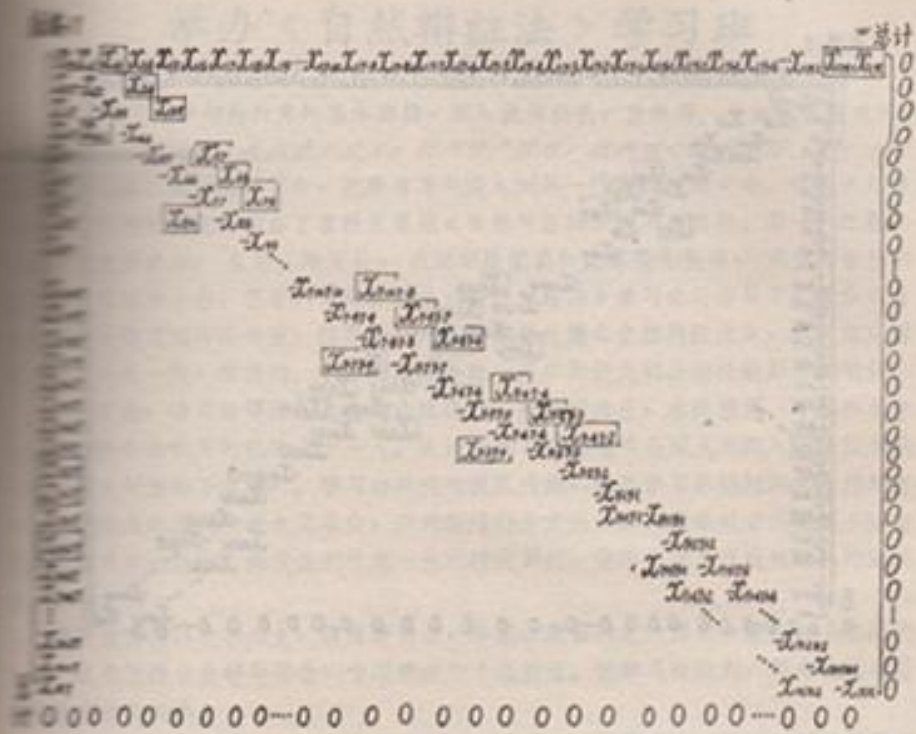


表 12



表 13

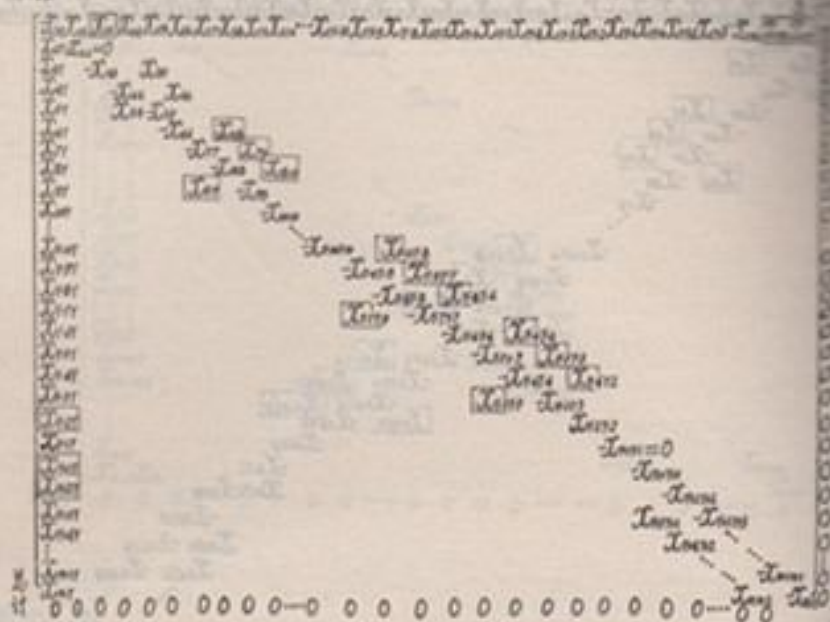


表 14

