文章编号: 1000- 5463(2004) 02- 0020- 06

模格与半单代数

张　霞, 陈裕群
(华南师范大学数学系, 广东广州 510631)

摘要: 讨论了有有限长度的模格是半单的若干充要条件, 给出了它们在代数模、模、环、群, 尤其是半群中的应用.

关键词: 模格; 合成列; 半单代数
中图分类号: O153. 1; O153. 3　　文献标识码: A

MODULAR LATTICE AND SEMISIMPLE ALGEBRAS

ZHANG Xia, CHEN Yu- qun
(Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: The characterizations of a modular lattice to be semisimple are obtained. By using these results, the necessary and sufficent conditions of an algebra module, module, ring, group and semigroup, respectively, to be semisimple are given.

Key words: modular lattice; composition series; semisimple algebras

1　基本概念和定理

设$(L, \leqslant)$是格. 我们知道, 若 $\forall a, b, c \in L$, $c \geqslant a \Rightarrow (a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c)$, 则 L 是模格. 若 $a \vee b \succ a$, $a \vee b \succ b \Rightarrow a \succ a \wedge b$, $b \succ a \wedge b$, 其中, $a \succ b$ 表示 a 是 b 的覆盖, 则$(L, \leqslant)$是半模格.

定义 1[1]　称偏序集$(S, \leqslant)$有有限长度, 若 S 的每个链都有界.

注 1　设偏序集$(S, \leqslant)$有有限长度, 若 $a, b \in S$, 且 $a > b$, 则存在有限多个元素 $a = a_0, a_1, \cdots, a_n = b \in S$, 使得 $a = a_0 \succ a_1 \succ \cdots \succ a_n = b$.

定义 2　设 L 是格, 称 L 满足升链(降链)条件, 若 L 的每个非空子集都有极大(极小)元.

引理 1　设 L 是格, 则

(1) L 满足升链条件当且仅当 L 的每个升链都有界;

(2) L 满足降链条件当且仅当 L 的每个降链都有界.

收稿日期: 2003 - 06 - 10
基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(021073); 广东省教育厅自然科学基金资助项目(Z02017)
作者简介: 张霞(1972-), 女, 吉林辽源人, 华南师范大学 2001 级硕士研究生; 陈裕群, 男, 湖北武汉人, 博士, 华南师范大学教授.

由定义1和引理1,我们有

引理2　设 L 是格,则 L 有有限长度当且仅当 L 满足升链条件和降链条件.

注2　若 L 有有限长度,则 L 必有最大、最小元,分别记为1和0. 本文中,$a\in L$ 是极大元当且仅当 $a\neq 1$ 且 $a\leqslant b<1\Rightarrow a=b$. 类似地,$a\in L$ 是极小元当且仅当 $a\neq 0$ 且 $0<b\leqslant a\Rightarrow a=b$.

定义3　设 L 是格,$a\in L$, 如果存在 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in L$, 使得

$$a=a_0\succ a_1\succ\cdots\succ a_k=0, \tag{1}$$

则称式(1)为元素 a 的一个合成列,k 称为 a 的合成列长度,记为 $c(a)=k$.

引理3[1]　设 L 是半模格,有有限长度,$a\in L$,则 a 的任意两个合成列有相同的长度.

引理4[1]　设 L 是模格,有有限长度,a, $b\in L$,则 $c(a\vee b)=c(a)+c(b)-c(a\wedge b)$.

推论1　设 L 是模格,有有限长度,则

(i) $\rho\in L$ 是极大元$\Leftrightarrow c(\rho)=c(1)-1$;

(ii) $\mu\in L$ 是极小元$\Leftrightarrow c(\mu)=1$.

定义4[2]　设 L 是有最小元0的格. $L-\{0\}$ 的子集 I 称为无关的, 若对于 I 的任意有限集 X,Y, 都有 $(\vee X)\wedge(\vee Y)=\vee(X\cap Y)$. 此处,我们约定 $\vee\varnothing=0$, 其中$\varnothing$是空集.

引理5[2]　设 $I=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是一个半模格 L 的极小元集, 0是 L 的最小元. 则以下命题等价:

(i) I 是无关的;

(ii) $(a_1\vee\cdots\vee a_i)\wedge a_{i+1}=0$, $\forall\, i=1,2,\cdots,n-1$;

(iii) $c(a_1\vee\cdots\vee a_n)=n$.

定义5　设 L 是格,有最小元0. $\eta\in L$ 称为本质元,若 $0\neq\sigma\in L\Rightarrow\eta\wedge\sigma\neq 0$.

引理6　设 L 是格,若 L 满足降链条件,则 $\bigvee_{\alpha\in A}\mu_\alpha=\bigwedge_{\beta\in B}\eta_\beta$,其中 $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 L 的所有极小元的集合,$\{\eta_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 L 的所有本质元的集合.

证明　设 μ_α 是 L 的极小元,η_β 是 L 的本质元,则

$$\eta_\beta\wedge\mu_\alpha\neq 0\Rightarrow\eta_\beta\wedge\mu_\alpha=\mu_\alpha\Rightarrow\mu_\alpha\subseteq\eta_\beta\Rightarrow\vee\mu_\alpha\subseteq\wedge\eta_\beta.$$

另一方面,由引理1,因为 L 满足降链条件,故存在自然数 n,使得 $\wedge\eta_\beta=\bigwedge_{i=1}^{n}\eta_{\beta_i}$. 易证,有限多个本质元的交仍是本质元,故 $\wedge\eta_\beta$ 是 L 的最小本质元. 于是,我们只需证 $\vee\mu_\alpha$ 是本质的即可.

设 $0\neq\delta\in L$. 则有一个极小元 μ 包含在 δ 中,易知 μ 必是 L 的极小元,所以

$$\mu\subseteq\vee\mu_\alpha\Rightarrow\mu\subseteq(\vee\mu_\alpha)\wedge\delta\Rightarrow\vee(\mu_\alpha)\wedge\delta\neq 0,$$

从而 $\vee\mu_\alpha$ 是本质的,故 $\bigvee_{\alpha\in A}\mu_\alpha=\bigwedge_{\beta\in B}\eta_\beta$.

定义6　设 L 是格,有最大元1. 称 $\delta\in L$ 是富余的,若 $\lambda\in L$, $\delta\vee\lambda=1\Rightarrow\lambda=1$.

引理7　设 L 是格且满足升链条件,则 $\bigwedge_{\alpha\in A}\rho_\alpha=\bigvee_{\beta\in B}\delta_\beta$, 其中 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 L 的所有极大元的集合,$\{\delta_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 L 的所有富余元的集合.

证明　设 δ_β 是 L 的富余元,ρ_α 是 L 的极大元,由 $\delta_\beta\vee\rho_\alpha\neq 1$ 知,$\delta_\beta\leqslant\rho_\alpha$,故 $\bigvee_{\beta\in B}\delta_\beta\leqslant\bigwedge_{\alpha\in A}\rho_\alpha$.

反过来,令 $\delta=\bigwedge_{\alpha\in A}\rho_\alpha$. 如果存在 $1\neq\lambda\in L$ 使 $\delta\vee\lambda=1$, 令 $\Omega=\{1\neq\rho\in L\mid\rho\vee\delta=1\}$, 则 $\Omega\neq\varnothing$. 于是 Ω 有极大元 ρ, 易见 ρ 也是 L 的极大元. 这是一个矛盾. 故 $\bigwedge_{\alpha\in A}\rho_\alpha$ 是富余元,从

而 $\bigwedge_{\alpha\in A}\rho_\alpha=\bigvee_{\beta\in B}\delta_\beta$.

定理 1 令 L 是模格,有有限长度,最大元为 1, 最小元为 0. 则下述命题等价:

(1) 存在指标集 A 使 $1=\bigvee_{\alpha\in A}\mu_\alpha$, 其中,$\mu_\alpha$ $(\alpha\in A)$是 L 的极小元;

(2) 1 是 L 上唯一的本质元;

(3) 存在指标集 B 使 $0=\bigwedge_{\beta\in B}\rho_\beta$, 其中,$\rho_\beta$ $(\beta\in B)$是 L 的极大元;

(4) 0 是 L 上唯一的富余元;

(5) 对任意的 $0\neq\lambda\in L$, 存在指标集 A_1, 使得 $\lambda=\bigvee_{\alpha\in A_1}\mu_\alpha$, 其中,$\mu_\alpha$ $(\alpha\in A_1)$是 L 的极小元;

(6) 对任意的 $1\neq\lambda\in L$, 存在指标集 B_1, 使得 $\lambda=\bigwedge_{\beta\in B_1}\rho_\beta$, 其中,$\rho_\beta$ $(\beta\in B_1)$是 L 的极大元;

(7) 对任意的 $0\neq\lambda\in L$, 存在自然数 k 和 L 的一组无关元 $a_1,a_2,\cdots,a_k$, 且 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 L 的极小元, 使得 $\lambda=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k$.

证明 (1)⇒(3) 设 $1=\bigvee_{\alpha\in A}\mu_\alpha$, μ_α 是极小元,则有以下事实:

(i) 存在自然数 n, 使得

$$1=\bigvee_{i=1}^{n}\mu_i,\text{且}\bigvee_{i=1}^{n-1}\mu_{k_i}\neq 1,\ \forall\, k_i\in\{1,2,\cdots,n\},\tag{2}$$

其中 μ_i $(i=1,2,\cdots,n)$是极小元.

事实上,由引理 2 知,L 满足升链条件,从而 1 可表示为有限多个极小元的并. 又由最小数原理知,存在最小的自然数 n,使得式(2)成立.

(ii) $\rho_i=\bigvee_{\substack{j\neq i\\ j\in\{1,2,\cdots,n\}}}\mu_j$ 是 L 的极大元, $i=1,2,\cdots,n$.

由(i)知,$\mu_i\not\leq\rho_i$, 从而 $\mu_i\wedge\rho_i=0$ 且 $\mu_i\vee\rho_i=1$, 由引理 4

$$c(1)=c(\mu_i\vee\rho_i)=c(\mu_i)+c(\rho_i)-c(\mu_i\wedge\rho_i)=c(\rho_i)+1,$$

故 $c(\rho_i)=c(1)-1$, 再由推论 1 知,ρ_i 是极大元.

(iii) $\bigwedge_{i=1}^{t}\rho_i=\bigvee_{i=t+1}^{n}\mu_i$, $t=1,2,\cdots,n-1$,且 $\bigwedge_{i=1}^{n}\rho_i=0$.

我们对 t 进行归纳证明.

当 $t=2$ 时,令 $\eta=\bigvee_{i=3}^{n}\mu_i$, 则 $\rho_1=\eta\vee\mu_2$, $\rho_2=\eta\vee\mu_1$, 且 $\rho_1\wedge\rho_2=(\eta\vee\mu_1)\wedge(\eta\vee\mu_2)=\eta\vee(\mu_1\wedge(\eta\vee\mu_2))=\eta$, 故命题成立.

假设 $\bigwedge_{i=1}^{t}\rho_i=\bigvee_{i=t+1}^{n}\mu_i$ 成立. 令 $\eta=\bigvee_{i=t+2}^{n}\mu_i$, 则 $\bigwedge_{i=1}^{t}\rho_i=\eta\vee\mu_{t+1}$, $\rho_{t+1}=\eta\vee\bigvee_{i=1}^{t}\mu_i$, 且 $\bigwedge_{i=1}^{t}\rho_i\wedge\rho_{t+1}=(\eta\vee\mu_{t+1})\wedge(\eta\vee\bigvee_{i=1}^{t}\mu_i)=\eta\vee(\mu_{t+1}\wedge(\eta\vee\bigvee_{i=1}^{t}\mu_i))=\eta$, 故命题对 $t+1$ 时也成立. 从而 $\bigwedge_{i=1}^{t}\rho_i=\bigvee_{i=t+1}^{n}\mu_i$, $t=1,\cdots,n-1$. 并且 $\bigwedge_{i=1}^{n-1}\rho_i=\mu_n$, $\bigwedge_{i=1}^{n}\rho_i=0$.

(3)⇒(1) 对偶于(1)⇒(3)的证明可得.

(3)⇒(5) 设 $0=\bigwedge_{\beta\in B}\rho_\beta$, $0\neq\lambda\in L$, 则有

(i) 存在极大元 $\rho\in L$, 使得 $\lambda\not\leq\rho$.

(ii) 设 $c(\lambda)=k$, 则存在 L 的极大元 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_k$,使得

$$\lambda\succ\lambda\wedge\rho_1\succ\cdots\succ\lambda\wedge\bigwedge_{i=1}^{k}\rho_i=0.\tag{3}$$

(iii) $\mu_i=\lambda\wedge(\bigwedge_{\substack{j\neq i\\ j\in\{1,2,\cdots,k\}}}\rho_j)$ $(i=1,2,\cdots,k)$是 L 的极小元.

事实上,(i)和(ii)是显然的. 对(iii), 假定 $1<i<k$, 则有

$$\lambda\wedge\bigwedge_{j=1}^{i}\rho_j\nleqslant\rho_{i+1}\Rightarrow\lambda\wedge\bigwedge_{j=1}^{i-1}\rho_j\nleqslant\rho_{i+1}\Rightarrow c(\lambda\wedge\bigwedge_{j=1}^{i-1}\rho_j\wedge\rho_{i+1})=c(\lambda\wedge\bigwedge_{j=1}^{i-1}\rho_j)-1.$$

由归纳法可证 $c(\lambda\wedge\rho_1\wedge\cdots\wedge\rho_{i-1}\wedge\rho_{i+1}\wedge\cdots\wedge\rho_{i+t})=k-i-(t-1)$, 故

$$c(\lambda\wedge(\bigwedge_{\substack{j\neq i\\ j\in\{1,2,\cdots,k\}}}\rho_j))=k-i-(k-i-1)=1.$$

因此,μ_i $(1<i<k)$是 L 的极小元.

当 $i=k$ 时,由式(3),显然,$\mu_k=\lambda\wedge\bigwedge_{j=1}^{k-1}\rho_j$ 是极小元.

当 $i=1$ 时,由于 $\lambda\wedge\rho_1\nleqslant\rho_2\Rightarrow\lambda\nleqslant\rho_2\Rightarrow\lambda\succ\lambda\wedge\rho_2$, $c(\lambda\wedge\rho_2)=k-1$, 同理有

$$\lambda\succ\lambda\wedge\rho_2\succ\lambda\wedge\rho_2\wedge\rho_3\succ\cdots\succ\lambda\wedge\bigwedge_{j=2}^{k}\rho_j,\ c(\lambda\wedge\bigwedge_{j=2}^{k}\rho_j)=k-(k-1)=1,$$

故 $\mu_1=\lambda\wedge\bigwedge_{j=2}^{k}\rho_j$ 是极小元. 从而,μ_i $(i=1,2,\cdots,k)$是 L 的极小元.

(iv) $\bigvee_{i=k-t}^{k}\mu_i=\lambda\wedge(\bigwedge_{i=1}^{k-t-1}\rho_i)$, $t=1,2,\cdots,k-2$ 且 $\lambda=\bigvee_{i=1}^{k}\mu_i$(用归纳法可证).

(5)⇒(1)与(6)⇒(3)是平凡的. (1)⇒(6)对偶于(3)⇒(5)的证明可得.

(5)⇒(7)设 $0\neq\lambda\in L$, $\lambda=\bigvee_{\alpha\in A_1}\mu_\alpha$, μ_α $(\alpha\in A_1)$是极小元. 由 L 满足升链条件及最小数原理知,存在自然数 k,使得 $\lambda=\bigvee_{i=1}^{k}\mu_i$, 且$\bigvee_{i=1}^{k-1}\mu_{t_i}\neq\lambda$, $\forall\, t_i\in\{1,2,\cdots,k\}$, 其中 μ_i 是极小元. 自然的,$(\mu_1\vee\cdots\vee\mu_t)\wedge\mu_{t+1}=0$, $t=1,2,\cdots,k-1$. 由引理 5 知,λ 是无关元$\mu_1,\cdots,\mu_k$ 的并.

(7)⇒(1)是平凡的. (1)⇔(2)由引理 6 可得, (3)⇔(4)由引理 7 可得.

注 3　在定理 1 中,把条件“存在指标集”替换成“存在有限指标集”,结论同样成立.

注 4　定理 1 中的模格和有限长度的条件不能少,见例 1 和例 2.

例 1　设 S_4 是四元对称群, 则 S_4 的子群格不是模格且定理 1 对 S_4 的子群格不成立.

例 2　设 G 是无限个单群的直积,记 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n\times\cdots$ (其中 G_i, $i=1,2,\cdots$是单群). 则群 G 的正规子群格是模格[1],但没有有限长度,且定理 1 对 G 的正规子群格不成立.

证明　设 G 的单位元为 0, 假若存在一组无关的极小正规子群 H_1, $H_2,\cdots,H_m$, 使得 $G=H_1\times H_2\times\cdots\times H_m$, 由于

$$(H_1\times\cdots\times H_i\times H_{i+1})/(H_1\times\cdots\times H_i)\cong H_{i+1}/(H_1\times\cdots\times H_i)\cap H_{i+1}\cong H_{i+1},$$

又因 H_i 是 G 的直因子且为极小正规子群, 故 H_i $(i=1,\cdots,m)$必为单群, 从而 $G=H_1\times\cdots\times H_m\succ\cdots\succ H_1\succ\{0\}$ 是 G 的一个合成列, 进而 $c(G)=m$. 显然 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_{m+1}$是 G 的一个正规子群, 但是 $c(G_1\times G_2\times\cdots\times G_{m+1})=m+1$, 这是一个矛盾.

2　定理 1 在半群中的应用

定义 7　设 S 是半群,$C({}_SS)$ 是 S 的左同余格, ε_S 是 S 上的恒等同余. 称 S 是左同余半单的, 若$\forall\,\lambda\in C({}_SS)$且 $\lambda\neq\varepsilon_S$, 都存在某指标集 A_λ, μ_α $(\alpha\in A_\lambda)$是 S 上的极小左同余, 使得

$\lambda = \bigvee_{\alpha \in A_\lambda} \mu_\alpha$(同样可以定义右同余半单半群).

注 **5** 左同余半单的半群是存在的, 如例 3、右零半群(见例 4)及例 5.

例 **3** 设 S 是群, 阶为 pq, 其中 p, q 是素数. 则 S 的子群格 $L(S)$ 是模格且当 S 不是 p^2 阶循环群时, S 是左同余半单的半群.

例 **4** 设 S 是右零半群. 易见 S 的每个左同余都是右同余, 且 $\forall a, b \in S$, $a \neq b$, $(a, b)^* = \{(a, b) \cup (b, a)\} \cup \varepsilon_S$ 是 S 的极小同余, 其中 $(a, b)^*$ 是 (a, b) 生成的同余. 从而, $\forall \varepsilon_S \neq \lambda \in C({}_SS)$, 都有 $\lambda = \bigvee_{\substack{(a, b) \in \lambda \\ a \neq b}} (a, b)^*$ 是极小同余的并.

例 **5** 设 S 是一个集合, 0 是 S 的一个固定元. 定义 S 中的运算为:

$$ab = 0, \quad \forall a, b \in S, \quad a \neq b; \quad aa = a, \quad a \in S,$$

则 S 是一个交换半群, S 上的每一个左同余都是右同余. 由文[3]的 Theorem 3.5, S 的每个同余都是 Rees 同余, 于是 S 的同余格是分配格, 从而是模格. 设 $\varepsilon_S \neq \lambda \in C(S)$ 是 S 的任一同余, 则 $\lambda = \bigvee_{\substack{(a, b) \in \lambda \\ a \neq b}} (a, b)^*$. 事实上, $\forall a, b \in S$, $a \neq b$, 都有 $(a, b)^* = (a, 0)^* \vee (b, 0)^*$ 且 $\forall 0 \neq a \in S$, $(a, 0)^* = \{(a, 0) \cup (0, a)\} \cup \varepsilon_S$ 是 S 的极小同余, 故 S 是同余半单的. 易见 S 的每个包含 0 的子集都是 S 的理想, 于是 S 的同余格有有限长度当且仅当 S 是有限集合.

由定理 1 立刻得到

定理 **2** 设 S 是半群, 其左同余格是模格, 有有限长度, ω_S 与 ε_S 分别为泛同余和恒等同余, 则下述命题等价:

(1) S 是左同余半单半群;

(2) ω_S 是唯一的本质左同余;

(3) ω_S 是若干极小左同余的并;

(4) ε_S 是唯一的富余左同余;

(5) ε_S 是若干极大左同余的交;

(6) S 的每个真左同余是若干极大左同余的交;

(7) 对 S 的每个左同余 ρ, 存在一个左同余 μ, 使 $\omega_S = \rho \vee \mu$, $\varepsilon_S = \rho \wedge \mu$.

3 定理 1 在代数模、模、环、群中的应用

设 A 是域 F 上的结合代数(R 是环, G 是群), ${}_AV$ 是左 $A-$ 代数模(${}_RV$ 是左 $R-$ 模), 则 ${}_AV$ 的代数子模格、${}_RV$ 的子模格、R 的理想格、G 的正规子群格都是模格. 应用定理 1, 我们有如下的一串推论.

推论 **2** 设 A 是域 F 上的结合代数, V 是左 $A-$ 代数模, V 的 $A-$ 代数子模格有有限长度, 则下述命题等价:

(1) V 是有限个单代数模的直和;

(2) V 是唯一的本质代数子模;

(3) 0 是极大代数子模的交;

(4) 0 是唯一的富余代数子模;

(5) V 的每个非零代数子模是若干极小代数子模的和;

(6) V 的每个真代数子模是若干极大代数子模的交;

(7) V 的每个代数子模都是直和因子.

注 **6**　推论 2 中, (1) ⇔(7) 可由文[4] 的定理 1. 4. 5 推出.

推论 **3**[5]　设 R 是环, M 是左R－ 模, M 的左子模格有有限长度, 则下述命题等价:

(1) M 是有限个左单子模的直和;

(2) M 是唯一的本质左子模;

(3) 0 是极大左子模的交;

(4) 0 是唯一的富余左子模;

(5) M 的每个非零左子模都是半单的;

(6) M 的每个真左子模都是若干极大左子模的交;

(7) M 的每个左子模都是直和因子.

注 **7**　一般的, 若$_RM$ 是左半单模, 则$_RM$ 的每个真左子模都是若干极大左子模的交, 但反之不成立. 推论 3 中, (1) ⇔(7) 可由文[5] 的 Theorem 9. 6 推出; (1) ⇔(3) 可由文[5] 的 Proposition 10. 15 推出; (3) ⇔(4) 可由文[5] 的 Proposition 9. 13 推出; (1) ⇔(2) 可由文[5] 的 Proposition 9. 7 推出.

推论 **4**　设 R 是环(G 是群), 它的理想格(正规子群格) 有有限长度, 0 是零元(e 是单位元), 则下述命题等价:

(1) R 是有限个单环的直和(G 是有限个单群的直积);

(2) R 是唯一的本质理想(G 是唯一的本质正规子群);

(3) 0 是极大理想的交($\{e\}$ 是极大正规子群的交);

(4) 0 是唯一的富余理想($\{e\}$ 是唯一的富余正规子群);

(5) R 的每个非零理想都是若干 R 的极小理想的和(G 的每个非 $\{e\}$ 正规子群都是若干 G 的极小正规子群的积);

(6) R 的每个真理想都是若干 R 的极大理想的交(G 的每个真正规子群都是若干 G 的极大正规子群的交);

(7) R 的每个理想都是直和因子(G 的每个正规子群都是直积因子).

注 **8**　我们这里群的合成列(看定义 3) 与传统的群的合成列的定义不同. 但是, 如果群 G 是它的若干极小正规子群的积, 且 G 的正规子群格有有限长度, 则由推论 4, G 是有限个单群的直积, 由此可知 G 有一个合成群列(传统意义下).

参考文献:

[1] JACOBSON N. Basic Algebra Ⅱ[M]. San Francisco: W H Freeman and Company, 1974.

[2] GRÄTZER G. General Lattice Theory[M]. New York: Academic press, 1978.

[3] MITSCH H. Semigroups and their lattice of congruences Ⅱ[J]. Semigroup Forum, 1997, 54: 1－ 42.

[4] 刘绍学. 环与代数[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[5] FRANK W A, FULLER K R. Rings and Categories of Modules[M]. New York: Springer－ Verlag, 1974.

【责任编辑　庄晓琼】