华南师范大学学报(自然科学版)　　2015,47(6):111－115
Journal of South China Normal University(Natural Science Edition)　　doi:10.6054/j.jscnun.2015.05.005

Gorenstein n－余挠模及 Gorenstein n－余挠维数

黄俊红，张翠萍*
(西北师范大学数学与统计学院,兰州 730070)

摘要:在右 n－凝聚环上研究 Gorenstein n－余挠模的相关性质,证明了在右 n－凝聚环上 Gorenstein n－平坦模的 Gorenstein n－余挠包络是 Gorenstein n－平坦模,Gorenstein n－余挠模的 Gorenstein n－平坦覆盖是 Gorenstein n－余挠模;将 n－余挠模的相关性质推广到 Gorenstein n－余挠模上;在右 n－凝聚环上讨论模和环的 Gorenstein n－余挠维数的相关性质,给出了右 n－凝聚环的左 Gorenstein n－余挠整体维数与其他同调维数之间的一些等价刻画.

关键词:n－凝聚环; Gorenstein n－余挠模; Gorenstein n－余挠维数
中图分类号:O153.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**: 1000－5463(2015)06－0111－05

Gorenstein n－Cotorsion Modules and Gorenstein n－Cotorsion Dimension

Huang Junhong, Zhang Cuiping*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Several relative characterizations of Gorenstein n－cotorsion modules over right n－coherent rings are shown. It proves that the Gorenstein n－cotorsion envelope of Gorenstein n－flat modules is Gorenstein n－flat module and the Gorenstein n－flat cover of Gorenstein n－cotorsion modules is Gorenstein n－cotorsion module. At the same time, it generates some properties of n－cotorsion modules to Gorenstein n－cotorsion modules. Finally, certain characterizations of Gorenstein n－cotorsion dimension of modules and rings are discussed, and some equivalent descriptions between Gorenstein n－cotorsion global dimension of right n－coherent rings and other homological dimensions are obtained.

Key words: n－coherent rings; Gorenstein n－cotorsion modules; Gorenstein n－cotorsion dimension

2002 年,Lee[1]给出了 n－凝聚环的定义. 2009 年,Bennis[2]给出了左 GF－闭环的概念. 2014 年, Gao[3]在左 GF－闭环上研究了模和环的 Gorenstein 余挠维数的相关性质;Selvaraj 等[4]给出了 n－绝对纯模、Gorenstein n－平坦模及 Gorenstein n－余挠模的定义,在右 n－凝聚环上讨论了 Gorenstein n－平坦模的相关性质.

本文在右 n－凝聚环上研究了 Gorenstein n－余挠模及模和环的 Gorenstein n－余挠维数的相关性质,得到 Gorenstein n－余挠模的 Gorenstein n－平坦覆盖是 Gorenstein n－余挠模,证明了在右 n－凝聚环上,所有 Gorenstein n－平坦左 R－模的投射维数不超过 1 等价于任意内射左 R－模的商模是 Gorenstein n－余挠的.

1　基本概念

设$\mathcal{C}$是左 R－模所构成的类. 由文献[5],称 φ: $M\to C$ 是 M 的$\mathcal{C}$－包络,如果满足以下 2 条:

(1)对任意左 R－同态 $f:M\to C'$,存在左 R－同态 $g:C\to C'$,使得 $g\varphi=f$,或者说序列 $\mathrm{Hom}_R(C,C')\to\mathrm{Hom}_R(M,C')\to 0$ 是正合的,其中 $C,C'\in\mathcal{C}$;

(2)当 $C'=C,f=\varphi$ 时,满足 $g\varphi=f$ 的左 R－同态 g 必是 C 上的自同构.

若只有(1)成立,则称 $\varphi:M\to C$ 是 M 的$\mathcal{C}$－预包络.

$\mathcal{C}$－预覆盖和$\mathcal{C}$－覆盖也可对偶地定义.

设$\mathcal{L}$,$\mathcal{C}$分别是左 R 模的类. 我们将$\mathcal{L}$的左、右正

收稿日期: 2015－03－23　　《华南师范大学学报(自然科学版)》网址:http://journal.scnu.edu.cn/n
基金项目: 国家自然科学基金项目(11361051)
* 通讯作者:张翠萍,副教授,Email:zhangcp@nwnu.edu.cn.

交类分别记作:

$^{\perp}\mathcal{L}=\{M:\mathrm{Ext}_R^1(M,L)=0$,对任意 $L\in\mathcal{L}\}$,

$\mathcal{L}^{\perp}=\{M:\mathrm{Ext}_R^1(L,M)=0$,对任意 $L\in\mathcal{L}\}$,

其中 M 是任意左 R-模.

由文献[5],称$(\mathcal{L},\mathcal{C})$是余挠理论,如果$\mathcal{L}^{\perp}=\mathcal{C}$, $^{\perp}\mathcal{C}=\mathcal{L}$. 由文献[6],称余挠理论$(\mathcal{L},\mathcal{C})$是完备的,如果每一个左 R-模都有一个$\mathcal{L}$-覆盖和$\mathcal{C}$-包络. 称余挠理论$(\mathcal{L},\mathcal{C})$是遗传的,如果对任意左 R-模的短正合列 $0\to C'\to C\to C''\to 0$,若 $C,C'\in\mathcal{C}$,则 $C''\in\mathcal{C}$.

设$\mathcal{F}$是左 R 模所构成的类,$Proj(R)$,$Inj(R)$分别表示投射模类和内射模类. 由文献[7],有

(1)称$\mathcal{F}$是投射可解类,如果满足:

(a)$Proj(R)\subseteq\mathcal{F}$;

(b)在任意 R-模的短正合列 $0\to F'\to F\to F''\to 0$ 中,若 $F''\in\mathcal{F}$,则 $F\in\mathcal{F}$当且仅当 $F'\in\mathcal{F}$.

(2)称$\mathcal{F}$是内射可解类,如果满足:

(a)$Inj(R)\subseteq\mathcal{F}$;

(b)在任意 R-模的短正合列 $0\to F'\to F\to F''\to 0$ 中,若 $F'\in\mathcal{F}$,则 $F\in\mathcal{F}$当且仅当 $F''\in\mathcal{F}$.

为了方便,本文中的环均指有单位元的结合环,模均指酉模. 对任意 R-模 M,$\mathrm{pd}_R(M)$、$\mathrm{fd}_R(M)$和 $\mathrm{id}_R(M)$分别表示 M 的投射维数、平坦维数和内射维数. 同时,在不指明左模或右模时都指左模.

2 n-余挠模及 n-平坦模

定义1[4] 称左 R-模 M 是 n-平坦的,如果对任意投射维数不超过 n 的有限表示右 R-模 N,有 $\mathrm{Tor}_1^R(N,M)=0$. 一般将 n-平坦模所做成的模类记作$\mathcal{F}_n$.

定义2[4] 称左 R-模 M 是 n-余挠模,如果对任意 $N\in\mathcal{F}_n$,有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 将 n-余挠模所做成的模类记作$\mathcal{C}_n$.

注记1 (1)设 n、m 是任意非负整数,并且若 $n\geqslant m$,则$\mathcal{F}_m\subseteq\mathcal{F}_n$. 因此 n-余挠模是 m-余挠模.

(2)内射模一定是 n-余挠模,并且有包含关系:内射模类$\subseteq n$-余挠模类$\subseteq$余挠模类.

引理1 对任意交换环 R,设 N 是 n-平坦 R-模,且 F 是平坦模. 则 $N\otimes_R F$ 是 n-平坦 R-模.

证明 任取投射维数有限的有限表示 R-模 C. 则存在正合列 $0\to K\to P\to C\to 0$,其中 P 是有限生成投射 R-模. 下证 $\mathrm{Tor}_1^R(C,N\otimes F)=0$.

用 $-\otimes_R(N\otimes F)$作用以上正合列,可得如下交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^R(C,N\otimes F) \arrow[d] & & & \\
K\otimes_R(N\otimes F) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\cong"'] & P\otimes_R(N\otimes F) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & C\otimes_R(N\otimes F) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
(K\otimes N)\otimes_R F \arrow[r, "\beta"] & (P\otimes N)\otimes_R F \arrow[r] & (C\otimes N)\otimes_R F \arrow[r] & 0 \\
\mathrm{Tor}_1^R(C\otimes N,F) \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

因为 F 是平坦模,所以 $\mathrm{Tor}_1^R(C\otimes N,F)=0$. 因此$\beta$是单的. 由以上交换可知 α 是单的. 又因为 $\mathrm{Tor}_1^R(P,N\otimes F)=0$,所以 $\mathrm{Tor}_1^R(C,N\otimes F)=0$. 因此 $N\otimes_R F$ 是 n-平坦 R-模. 证毕.

命题1 设 R 是交换环,则以下条件等价:

(1)M 是 n-余挠模;

(2)对任意平坦 R-模 F,$\mathrm{Hom}_R(F,M)$是 n-余挠模;

(3)对任意投射 R-模 P,$\mathrm{Hom}_R(P,M)$是 n-余挠模.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 N 是任意 n-平坦 R-模,则有正合列 $0\to K\to P\to N\to 0$,其中 P 是投射 R-模. 对任意平坦 R-模 F,用 $-\otimes_R F$ 作用到上述正合列上,可得正合列

$$0\to K\otimes_R F\to P\otimes_R F\to N\otimes_R F\to 0.$$

由引理1可知 $N\otimes_R F$ 是 n-平坦 R-模. 用 $\mathrm{Hom}_R(-,M)$作用到上述正合列上,可得:

$$\mathrm{Hom}_R(P\otimes_R F,M)\to\mathrm{Hom}_R(K\otimes_R F,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(N\otimes_R F,M)=0.$$

由文献[8]的定理5可得:$\mathrm{Hom}_R(P,\mathrm{Hom}_R(F,M))\to\mathrm{Hom}_R(K,\mathrm{Hom}_R(F,M))\to 0$,从而有正合列 $\mathrm{Hom}_R(P,\mathrm{Hom}_R(F,M))\to\mathrm{Hom}_R(K,\mathrm{Hom}_R(F,M))\to\mathrm{Ext}_R^1(N,\mathrm{Hom}_R(F,M))\to\mathrm{Ext}_R^1(P,\mathrm{Hom}_R(F,M))=0$. 因此,$\mathrm{Ext}_R^1(N,\mathrm{Hom}_R(F,M))=0$,故 $\mathrm{Hom}_R(F,M)$是 n-余挠模.

(2)$\Rightarrow$(3). 投射模是平坦模,结论显然成立.

(3)$\Rightarrow$(1). 取 $P=R$,由同构式 $\mathrm{Hom}_R(R,M)\cong M$ 可知结论成立. 证毕.

3 Gorenstein n-余挠模

定义3[3] 称环 R 是右(左)n-凝聚的($n>0$ 或 $n=\infty$),如果任意自由右(左)R-模的投射维数不超过 $n-1$ 的有限生成子模是有限表示的. 称环 R 是 n-凝聚环,如果环 R 既是左 n-凝聚的,又是右 n-凝聚的.

定义4[4] 称左 R-模 M 是 n-绝对纯的,如果对任意投射维数不超过 n 的有限表示左 R 模 N,有

$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 显然,内射模一定是 n - 绝对纯的.

定义 5[4]　称左 R - 模 M 是 Gorenstein n - 平坦的,如果存在 n - 平坦左 R - 模的正合序列

$$F=\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong \mathrm{Im}(F_0\to F^0)$,并且复形 $E\otimes_R F$ 是正合的,其中 E 是任意n - 绝对纯右 R - 模. 将 Gorenstein n - 平坦模所做成的模类记作$\mathcal{GF}_n$.

定义 6[4]　称左 R - 模 M 是 Gorenstein n - 余挠的,如果对任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模 N, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 将 Gorenstein n - 余挠模所做成的模类记作$\mathcal{GC}_n$.

注记 2　设 R 是环,则有以下包含关系:

(1)平坦模类$\subseteq n$ - 平坦模类$\subseteq$ Gorenstein n - 平坦类;

(2)Gorenstein n - 余挠模类$\subseteq n$ - 余挠模类$\subseteq$余挠模类.

引理 2　设 R 是右 n - 凝聚环. 如果 M 是任意 Gorenstein n - 余挠模,那么对任意 Gorenstein n - 平坦模 N,有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0,i\geqslant 1$.

证明　由定义 6 可知 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0$. 下证 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0,i\geqslant 2$.

因为任意模都有投射分解,所以取 N 的投射分解:

$$\cdots\longrightarrow P_n\xrightarrow{f_n}P_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{f_1}P_0\xrightarrow{f_0}N\longrightarrow 0.$$

因为 R 是右 n - 凝聚环,所以由文献[4]的推论 3.6 知 $\mathrm{Ker}\,f_i\,(i\geqslant 0)$是 Gorenstein n - 平坦的. 设 $K_i=\mathrm{Ker}\,f_i$. 则 $\mathrm{Ext}_R^{i+1}(N,M)\cong\mathrm{Ext}_R^1(K_{i-1},M)=0\ (i\geqslant 1)$. 故结论成立. 证毕.

命题 2　设 R 是右 n - 凝聚环,则 Gorenstein n - 余挠模类是内射可解类.

证明　显然内射模类$\subseteq$Gorenstein n - 余挠模类.

设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 R - 模的短正合列. 下证:若 $M'\in\mathcal{GC}_n$,则 $M''\in\mathcal{GC}_n\Leftrightarrow M\in\mathcal{GC}_n$.

设 N 是任意 Gorenstein n - 平坦 R - 模,用 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$作用到上述正合列上,可得:

$$0=\mathrm{Ext}_R^1(N,M')\to\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^1(N,M'')\to\mathrm{Ext}_R^2(N,M').$$

由引理 2 可知 $\mathrm{Ext}_R^2(N,M')=0$,故 $\mathrm{Ext}_R^1(N,M)\cong\mathrm{Ext}_R^1(N,M'')$. 则 $M''\in\mathcal{GC}_n\Leftrightarrow M\in\mathcal{GC}_n$. 证毕.

引理 3[4]　设 R 是右 n - 凝聚环,则$(\mathcal{GF}_n,\mathcal{GC}_n)$是遗传的完备的余挠理论.

设 M 是任意左 R - 模. 由命题 2 及引理 3 可知,在右 n - 凝聚环上任意 R - 模都有满的 Gorenstein n - 平坦覆盖和单的 Gorenstein n - 余挠包络. 以下将 M 的 Gorenstein n - 平坦覆盖和 Gorenstein n - 余挠包络分别记作:$GF_n(M)$,$GC_n(M)$.

定理 1　设 R 是右 n - 凝聚环. 则

(1)Gorenstein n - 平坦模的 Gorenstein n - 余挠包络是 Gorenstein n - 平坦模;

(2)Gorenstein n - 余挠模的 Gorenstein n - 平坦覆盖是 Gorenstein n - 余挠模.

证明　(1)设 F 是任意 Gorenstein n - 平坦模. 由引理 3 可知 F 有 Gorenstein n - 余挠包络 $\varphi:F\to C$,则有正合列 $0\to F\to C\to L\to 0$. 根据 Wakamutsu 引理有 $L\in\mathcal{GF}_n$. 由文献[4]的推论 3.6 知,在右 n - 凝聚环 R 上 Gorenstein n - 平坦 R - 模对扩张封闭,因此 $C\in\mathcal{GF}_n$.

(2)设 C 是 Gorenstein n - 余挠模. 由引理 3 可知 C 有 Gorenstein n - 平坦覆盖 $f:F\to C$,则有正合列 $0\to K\to F\to C\to 0$. 根据 Wakamutsu 引理[5],K 是 Gorenstein n - 余挠模. 因此由命题 2 可知 F 是 Gorenstein n - 余挠模. 证毕.

定理 2　设 R 是右 n - 凝聚环. 则下列条件等价:

(1)所有左 R - 模是 Gorenstein n - 余挠的;

(2)所有的 Gorenstein n - 平坦左 R - 模是 Gorenstein n - 余挠的;

(3)所有的 Gorenstein n - 平坦左 R - 模是投射的;

(4)对任意左 R - 同态 $f:M_1\to M_2$,若 M_1,M_2 是 Gorenstein n - 余挠模,则 $\mathrm{Ker}\,f$ 是 Gorenstein n - 余挠模.

证明　(1)$\Rightarrow$(2). 结论显然成立.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 G 是任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模. 则有正合列

$$0\to K\to P\to G\to 0,$$

其中 P 是投射左 R - 模. 因为 R 是右 n - 凝聚环,所以 K 是 Gorenstein n - 平坦的. 因此 $\mathrm{Ext}_R^1(G,K)=0$,即正合列可裂,故 G 是投射左 R - 模.

(3)$\Rightarrow$(1). 因为$(Proj(R),{}_RM)$是余挠理论,所以结论显然成立.

(1)$\Rightarrow$(4). 显然成立.

(4)$\Rightarrow$(2). 设 M 是 Gorenstein n - 平坦左 R - 模,则有以下交换:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\delta_M"] \arrow[drr, "0"'] & GC_n(M) \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\delta_L\xi"] & L \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & & GC_n(L) \arrow[u, "\delta_L"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $GC_n(M)$和 $GC_n(L)$分别表示 M 和 L 的 Gorenstein n - 余挠包络. 由以上交换可知 $M=\mathrm{Ker}\,\xi=$

$\mathrm{Ker}(\delta_L\xi)$,由条件(4)可知 M 是 Gorenstein n - 余挠模,即条件(2)成立. 证毕.

4 模和环的 Gorenstein n - 余挠维数

定义7 设 R 是环,M 是左 R - 模. 将 M 的 Gorenstein n - 余挠维数记作 $G_n-\mathrm{cd}_R(M)$,定义为 $G_n-\mathrm{cd}_R(M)=\inf\{k\mid$ 存在正合列 $0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^{k-1}\to C^k\to 0$,其中 $C^i\in\mathcal{GC}_n$,$0\leqslant i\leqslant k$,k 为非负整数$\}$. 若这样的 k 不存在,则记 $G_n-\mathrm{cd}_R(M)=\infty$. 将环 R 的左 Gorenstein n - 余挠整体维数记作 $l.G_n-\mathrm{cD}(R)=\sup\{G_n-\mathrm{cd}_R(M)\mid M$ 是左 R - 模$\}$. 对偶地,将环 R 的右 Gorenstein n - 余挠整体维数记作 $r.G_n-\mathrm{cD}(R)=\sup\{G_n-\mathrm{cd}_R(M)\mid M$ 是右 R - 模$\}$. 特别地,若 R 是交换环,则 $l.G_n-\mathrm{cD}(R)=r.G_n-\mathrm{cD}(R)$.

命题3 设 R 是环,M 是左 R - 模,k 为非负整数,则下列条件等价:

(1) $G_n-\mathrm{cd}_R(M)\leqslant k$;

(2) $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,M)=0$,其中 N 是任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模;

(3) $\mathrm{Ext}_R^{k+i}(N,M)=0$,其中 N 是任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模,$i\geqslant 1$;

(4)若序列 $0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^{k-1}\to C^k\to 0$ 正合,并且若 $C^0,C^1,\cdots,C^{k-1}$ 是 Gorenstein n - 余挠左 R - 模,则 C^k 也是 Gorenstein n - 余挠左 R - 模;

(5)存在正合列 $0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^{k-1}\to C^k\to 0$,其中 $C^0,C^1,\cdots,C^{k-1},C^k$ 是 Gorenstein n - 余挠左 R - 模.

特别地,若 R 是右 n - 凝聚环,则以上条件等价于:

(6) $G_n-\mathrm{cd}_R(GF_n(M))\leqslant k$.

证明 (1)⇔(2). 由定义7即可得证.

(2)⇒(3). 由(2)可知,存在正合列

$$0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^{k-1}\to C^k\to 0,$$

对任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模 N,用 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用以上正合列,由长序列引理[8]及维数转移公式[8]可得 $\mathrm{Ext}_R^i(N,C^k)\cong\mathrm{Ext}_R^{k+i}(N,M)$. $C^k\in\mathcal{GC}_n$,则由引理2可得 $\mathrm{Ext}_R^i(N,C^k)=0$. 因此 $\mathrm{Ext}_R^{k+i}(N,M)=0$,$i\geqslant 1$.

(3)⇒(4). 对任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模 N,用 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用到正合列

$$0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^{k-1}\to C^k\to 0$$

上,由长序列引理及维数转移公式可得 $\mathrm{Ext}_R^i(N,C^k)\cong\mathrm{Ext}_R^{k+i}(N,M)=0$. 特别地,当 $i=1$ 时,$\mathrm{Ext}_R^1(N,C^k)=0$. 故 $C^k\in\mathcal{GC}_n$.

(4)⇒(5). 因为任意 R - 模都有内射分解,所以结论显然成立.

(5)⇒(2). 对任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模 N,用 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用到正合列

$$0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^{k-1}\to C^k\to 0$$

上,由长序列引理及维数转移公式可得 $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,M)\cong\mathrm{Ext}_R^1(N,C^k)=0$.

(1)⇔(6). 若 R 是右 n - 凝聚环,则由文献[4]的推论4.8可知 M 有 Gorenstein n - 平坦覆盖 $GF_n(M)$,则有正合列

$$0\to K\to GF_n(M)\to M\to 0.$$

对任意 Gorenstein n - 平坦左 R 模 N,用 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用到上述正合列上,由长序列引理可得:

$$\mathrm{Ext}_R^k(N,K)\to\mathrm{Ext}_R^k(N,GF_n(M))\to\mathrm{Ext}_R^k(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,K).$$

在右 n - 凝聚环上 Gorenstein n - 平坦左 R - 模对扩张封闭,则由 Wakamutsu 引理可知 K 是 Gorenstein n - 余挠模. 由引理2可知 $\mathrm{Ext}_R^k(N,K)=0$,$\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,K)=0$. 因此 $\mathrm{Ext}_R^k(N,\mathcal{GF}_n(M))\cong\mathrm{Ext}_R^k(N,M)$. 故条件(1)和条件(6)的等价性显然成立. 证毕.

命题4 设 R 是环,$\{A_i\}_{i\in I}$ 是左 R - 模族,I 是指标集. 则 $\prod_{i\in I}A_i\in\mathcal{GC}_n$ 当且仅当 $A_i\in\mathcal{GC}_n$,$i\in I$,并且 $G_n-\mathrm{cd}_R(\prod_{i\in I}A_i)=\sup\{G_n-\mathrm{cd}_R(A_i)\mid i\in I\}$.

证明 设 F 是任意左 R - 模. 由同构式 $\mathrm{Ext}_R^1(F,\prod_{i\in I}A_i)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}_R^1(F,A_i)$ 可知当取 F 为 Gorenstein n - 平坦左 R - 模时结论显然成立. 证毕.

定理3 设 R 是右 n - 凝聚环,k 为整数且 $k\geqslant 1$,则以下条件等价:

(1) $l.G_n-\mathrm{cD}(R)\leqslant k$;

(2)所有 Gorenstein n - 平坦左 R - 模的投射维数不超过 k;

(3)所有 Gorenstein n - 平坦左 R - 模的 Gorenstein n - 余挠维数不超过 k;

(4)任意内射左 R - 模的商模的 Gorenstein n - 余挠维数不超过 $k-1$;

(5)任意 Gorenstein n - 余挠左 R - 模的商模的 Gorenstein n - 余挠维数不超过 $k-1$.

证明 (1)⇔(2)和(1)⇒(3)显然成立.

(3)⇒(2). 设 M 是任意左 R - 模. 因为环 R 是右 n - 凝聚环,所以 M 有 Gorenstein n - 平坦覆盖 $GF_n(M)$. 则有正合列 $0\to K\to GF_n(M)\to M\to 0$. 对任意 Gorenstein n - 平坦左 R - 模 N,用 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用以上正合列,可得:

$$\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,K)\to\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,GF_n(M))\to$$
$$\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^{k+2}(N,K).$$

因为环 R 是右 n - 凝聚环,所以 K 是 Gorenstein n - 余挠模. 根据引理 2, $\mathrm{Ext}_R^{k+2}(N,K)=0$,由条件(3)可知 $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,GF_n(M))=0$. 因此 $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,M)=0$,故 N 的投射维数不超过 k.

(1)⇒(4). 设 E 是任意内射左 R - 模, K 是 E 的子模. 则有正合列

$$0\to K\to E\to E/K\to 0.$$

对任意 Gorenstein n - 平坦左 R 模 N,用 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 作用以上正合列,可得:

$$0=\mathrm{Ext}_R^{k}(N,E)\to\mathrm{Ext}_R^{k}(N,E/K)\to\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,K).$$

由条件(1)知 $G_n-\mathrm{cd}_R(K)\leqslant k$,因此 $\mathrm{Ext}_R^{k+1}(N,K)=0$. 因为 $\mathrm{Ext}_R^{k}(N,E)=0$,所以 $\mathrm{Ext}_R^{k}(N,E/K)=0$. 故 $G_n-\mathrm{cd}_R(E/K)\leqslant k-1$.

(4)⇒(1). 设 M 是任意左 R - 模,则有正合列

$$0\to M\to E\to E/M\to 0,$$

其中 E 是内射左 R - 模. 由条件(4)可知 $G_n-\mathrm{cd}_R(E/M)\leqslant k-1$,因为 $E\in\mathcal{GC}_n$,所以 $G_n-\mathrm{cd}_R(M)\leqslant k$. 故由 M 的任意性可知条件(1)成立.

(4)⇒(5). 设 M 是任意 Gorenstein n - 余挠左 R - 模, K 是 M 的子模. 则有正合列

$$0\to K\to M\to M/K\to 0 \qquad (1)$$

和

$$0\to K\to E(K)\to L\to 0, \qquad (2)$$

其中 $E(K)$ 是 K 的内射包络. 则有以下交换:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E(K) \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & M/K \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

根据条件(4), $G_n-\mathrm{cd}_R(L)\leqslant k-1$,则有正合列

$$0\to L\to C_L^0\to C_L^1\to\cdots\to C_L^{k-1}\to 0, \qquad (3)$$

其中 $C_L^i\in\mathcal{GC}_n\ (0\leqslant i\leqslant k-1)$. 由正合列(2)、(3)有以下正合列

$$0\to K\to E(K)\to C_L^0\to C_L^1\to\cdots\to C_L^{k-1}\to 0,$$

因为 $C_L^i\in\mathcal{GC}_n\ (0\leqslant i\leqslant k-1)$, $E(K)\in\mathcal{GC}_n$,所以 $G_n-\mathrm{cd}_R(K)\leqslant k$.

设左 R - 模 M/K 的内射分解为 $0\to M/K\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{k-2}\to E^{k-1}\to\cdots$. 令 $C=\mathrm{Im}(E^{k-2}\to E^{k-1})$,则有正合列

$$0\to M/K\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{k-3}\to E^{k-2}\to C\to 0. \qquad (4)$$

由正合列(1)、(4)可得正合列

$$0\to K\to M\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^{k-3}\to E^{k-2}\to C\to 0.$$

因为 $G_n-\mathrm{cd}_R(K)\leqslant k$, 所以 $C\in\mathcal{GC}_n$. 因此 $G_n-\mathrm{cd}_R(M/K)\leqslant k-1$. 证毕.

推论 1　设 R 是右 n - 凝聚环. 则以下条件等价:

(1) $l.\ G_n-\mathrm{cD}(R)\leqslant 1$;

(2)所有 Gorenstein n - 平坦左 R - 模的投射维数不超过 1;

(3)所有 Gorenstein n - 平坦左 R - 模的 Gorenstein n - 余挠维数不超过 1;

(4)任意内射左 R - 模的商模是 Gorenstein n - 余挠的;

(5)任意 Gorenstein n - 余挠左 R - 模的商模是 Gorenstein n - 余挠的.

参考文献:

[1] Lee S B. n - coherent rings[J]. Communication in Algebra, 2002, 30(3): 1119 - 1126.

[2] Bennis D. Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions[J]. Communication in Algebra, 2009, 37: 855 - 868.

[3] Gao Z H. On Gorenstein cotorsion dimension over GF - closed rings[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society,2014,51(1):173 - 187.

[4] Selvaraj C, Udhayakumar R, Umamaheswaran A. Gorenstein n - flat modules and their covers[J]. Asia - European Journal of Mathematics, 2014,7(3):1 - 13.

[5] Enochs E E, Jenda O M G. Relative homological algebra [M]. Belin: Walter de Gruyter, 2000.

[6] Enochs E E, Jenda O M G, Lopez - Ramos J A. The existence of Gorenstein flat covers[J]. Mathematics Scand, 2004, 94(1): 46 -62.

[7] Holm H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure Application Algebra, 2004, 189: 167 - 193.

[8] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京:高等教育出版社, 1998.

【中文责编:庄晓琼　英文责编:肖菁】